INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Modélisation hautes fréquences en magnétohydrodynamique : aspect magnétique

Olivier Coulaud

N° 2407

Octobre 1994

PROGRAMME 6

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

Modélisation hautes fréquences en magnétohydrodynamique : aspect magnétique

Olivier Coulaud *

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique
Projet Numath

Rapport de recherche n ° 2407 — Octobre 1994 — 35 pages

Résumé : Dans ce papier nous rappelons la modélisation de l'induction magnétique générée par des courants alternatifs de haute fréquence pour le traitement des métaux liquides. A l'aide des méthodes asymptotiques nous construisons des modèles limites lorsque la fréquence du courant imposée est grande.

Mots-clé : Equation de Maxwell, courant induit, équation de Navier-Stokes, méthode asymptotique, couche limite, frontière libre.

(Abstract: pto)

*. Olivier.Coulaud@loria.fr

Unité de recherche INRIA Lorraine
Technôpole de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue de Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY (France)
Téléphone : (33) 83 59 30 30 – Télécopie : (33) 83 27 83 19
Antenne de Metz, technopôle de Metz 2000, 4 rue Marconi, 55070 METZ
Téléphone : (33) 87 20 35 00 – Télécopie : (33) 87 76 39 77

High frequency modelling in Magnetohydrodynamics : Magnetic aspect

Abstract: In this paper we explain the modelling of the magnetic induction for the treatment of liquids' metals. By the way of asymptotic methods we construct some limit models when the frequency of the imposed current is high.

Key-words: Maxwell's equations, eddy curent, Navier-Stokes's equations, asymptotique method, boundary layer, free boundary.

Table des matières

Les effets électromagnétiques telsque l'effet joule, les courants induits, l'effet de peau sont de plus en plus utilisés dans les applications industrielles pour le traitement des métaux liquides [1]. Parmi celles-ci on peut citer le chauffage par induction, le brassage électromagnétique, la lévitation, ... L'avantage d'utiliser l'induction magnétique est de pouvoir agir à distance sur le matériaux, par exemple on peut lui fournir de l'énergie thermique ou mécanique sans interaction avec un autre matériaux. On parle alors de procédé propre car il n'y a pas d'interaction chimique entre le métal liquide et son moule. La fréquence du courant imposée dans les inducteurs est un paramètre important qui dépend de l'application considérée et de l'effet recherché. Lorsque cette fréquence est élevée le champ magnétique ne pénètre pas de manière instantanée dans les conducteurs. Il se concentre près de la surface dans une zone appelée *la peau* puis va diffuser lentement en profondeur. Nous avons donc un phénomène de couche limite, appelé effet de peau électromagnétique, dont l'épaisseur est proportionnelle à l'inverse de la racine carrée de la fréquence. Comme nous nous intéressons à des métaux liquides, nous avons un problème à frontière libre et donc nous devons déterminer la forme prise par le métal sous l'action du champ électromagnétique. Ce dernier a aussi pour but de confiner le liquide. De nombreuses études ou expériences ont été réalisées pour mieux comprendre les phénomènes en jeu ainsi que leur importance, on peut citer par exemple [13], [15],[16], [17], [18]. Les modèles numériques pour résoudre ce type de problème de manière directe c'est à dire par la résolution complète des équations de Navier-Stokes et Maxwell en dimension 3 d'espace doivent tenir compte dans la discrétisation de cette couche limite pour capturer correctement le phénomène physique. Du fait de la faible épaisseur de la peau électromagnétique les résolutions sont coûteuses ; une méthode plus rapide pour déterminer la forme du métal ainsi que la distribution du champ magnétique est donc nécessaire. Une analyse du sytème formé des équations de Maxwell et de Navier-Stokes par la méthode des perturbations singulières va nous permettre de comprendre les phénomènes en jeux et de construire de tels modèles.

Nous nous plaçons dans le cas des hautes fréquences et étudions les phénomènes à l'échelle caractéristique du temps magnétique. Le but de ce papier est de préciser la modélisation ainsi que de construire des modèles simplifiés par les méthodes des perturbations. Tout d'abord nous rappellerons les hypothèses faites pour arriver aux équations de Maxwell et de Navier-Stokes dans le cadre de l'induction magnétique. Une mise adimensionnelle permet de faire apparaitre deux petits paramètres : l'inverse du paramètre d'écran, ϵ, et le nombre de Reynolds magnétiques Re_m. Nous supposerons ici que $Re_m = o(1)$, ce qui revient à considérer les vitesses dans le métal pas trop grandes et nous nous concentrerons sur l'influence du paramètre ϵ. Ce paramètre correspond au rapport entre la fréquence de diffusion dans le conducteur et la fréquence du courant imposé dans l'inducteur. Dans le cas qui nous intéresse, les fréquences élevées de l'ordre de 10 KHertz, ϵ est un petit paramètre. Dans la deuxième partie, à l'aide des méthodes des développements asymptotiques nous donnons un model limite, $\epsilon = 0$, pour les conducteurs solides comme les écrans. Dans la dernière partie, nous généralisons les résultats précedents aux conducteurs liquides. Finalement nous montrons comment on peut retrouver le modèle magnétostatique largement étudié et utilisé par exemple dans [3], [5], [6], [9], [14].

1 Formulation du problème

Dans cette partie nous nous proposons de décrire les hypothèses physiques et les équations conduisant à la modélisation de l'induction magnétique pour le traitement des métaux liquides. Plus particulièrement on s'intéressera aux problèmes de formage électromagnétique tridimensionnel, ou de guidage de jet.

Le système auquel nous nous intéressons comprend $N-1$ inducteurs, notés $\Omega_2, ..., \Omega_N$, une région de métal liquide, notée Ω_1, et une de vide ou d'air notée Ω_0. Le mouvement du métal liquide provient de l'action combinée du champ magnétique, créée par les inducteurs au travers de la force de Lorentz, et de la gravitation.

Nous nous plaçons sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 (H1) *le champ magnétique est régi par les équations de Maxwell, le mouvement du métal par les équations de Navier-Stokes incompressible ; de plus l'air est supposé à pression constante et non conducteur.*

1.1 Les équations

On note par $\Omega = \Omega_0 \cup (\bigcup_{i=2}^{N} \Omega_i)$ et $\mathbb{R}^d = \Omega_1 \cup \Omega$ avec d la dimension de l'espace. Nous ne rappellerons pas ici comment sont obtenues les équations de Maxwell et de Navier-Stokes, pour plus de détails on se référera par exemple à [2], [10], [11], [12].

1.1.1 Equations du champ magnétique

Le champ magnétique est régi par les équations de Maxwell suivantes :

$$div\,\underline{B} = 0 \tag{1–1a}$$

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + rot\,\underline{E} = 0 \tag{1–1b}$$

$$div\,\underline{D} = q \tag{1–1c}$$

$$\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} - rot\,\underline{H} + \underline{j} = 0 \tag{1–1d}$$

où

$\underline{B}$ est le champ magnétique d'induction, $\underline{H}$ le champ magnétique, $\underline{j}$ la densité de courant, $\underline{D}$ le déplacement électrique, q la densité volumique de charge, $\underline{E}$ le champ électrique.

De plus nous supposons que les matériaux satisfassent à l'hypothèse suivante

Hypothèse 2 (H2) *les matériaux, supposés homogènes et isotropes, ont un comportement linéaire qui se traduit par*

$$\underline{B} = \mu \underline{H} \quad et \quad \underline{E} = \varepsilon \underline{D}$$

où ε est la perméabilité électrique, μ la perméabilité magnétique avec ε et μ constant dans les domaines Ω_i pour $i = 0, N$, on notera ε_i respectivement μ_i cette constante.

Dans le vide, les constantes, ϵ_0 et μ_0 ont pour valeurs dans le système MKSA, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} Hm^{-1}$ et $\epsilon_0 = c^2/\mu_0$, où c est la vitesse de la lumière [1]. Pour de tels matériaux, il existe une relation linéaire entre la densité de courant, $\underline{j}$ et le champ électrique total, appelée la loi d'Ohm.

Hypothèse 3 (H3, loi d'Ohm)

$$\underline{j} = \sigma\, \underline{E_t}$$

où σ est la conductivité électrique, $\underline{E_t}$ le champ électrique total. Ils ont pour expressions :

$$\begin{array}{rcl} \sigma(\underline{x}) & = & \sigma_i \quad si\ \underline{x} \in \Omega_i,\ i = 0, ..., N \\ \underline{E_t} & = & \left\{ \begin{array}{ll} \underline{E} & dans\ les\ inducteurs\ et\ les\ conducteurs\ solides, \\ \underline{E} + \underline{u} \wedge \underline{B} & dans\ le\ métal, \\ 0 & dans\ l'air\ ou\ les\ isolants\ magnétiques, \end{array} \right. \end{array}$$

où $\underline{u} \wedge \underline{B}$ représente le champ électrique créé par le métal conducteur en mouvement dans le champ magnétique $\underline{B}$.

Introduisons l'hypothèse la plus importante pour la suite ; elle va nous permettre de découpler le calcul du champ électrique de celui du champ magnétique.

Hypothèse 4 (H4) *Les courants de déplacement sont négligeables devant les courants de conduction. Cela se traduit par le fait que $\dfrac{\partial \underline{D}}{\partial t}$ est négligeable devant $\underline{j}$ et rot$\underline{H}$ dans (1–1d).*

1. c = 299 792 458 km/s.

Cette hypothèse est valable dès que $\frac{\varepsilon\omega}{\sigma} << 1$ où ω est la fréquence du champ magnétique. C'est le cas pour les problèmes de magnétohydrodynamique (cf [10, page 10]). De plus on se trouve dans le cas ou les dimensions de l'objet sont petites devant la longueur d'onde $\lambda = c/\omega$. Sous cette approximation l'équation (1–1d) se simplifie en

$$rot\,\underline{H} = \underline{j}. \tag{1–2}$$

On suppose les inducteurs multifilamentaires et soumis à une densité de courant $\underline{j}_d$. Cette hypothèse permet de ne pas tenir compte des courants induit dans les inducteurs.
Finalement sous les hypothèses (**H1**)-(**H4**) les équations du champ magnétique s'écrivent dans les inducteurs

$$\left.\begin{array}{rcl} rot\,\underline{H} &=& \underline{j}_d \\ div\,\underline{B} &=& 0 \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_N,$$

et dans l'air

$$\left.\begin{array}{l} rot\,\underline{H} = 0 \\ div\,\underline{B} = 0 \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega_0.$$

Pour le métal, on a

$$div\,\underline{B} = 0$$

et en prenant le rotationnel de (1–2) puis en utilisant la loi d'Ohm et (1–1b) nous avons

$$rot\,rot\,\underline{H} = rot\,\underline{j} = rot\,\sigma_1(\underline{E} + \underline{u} \wedge \underline{B}) = -\sigma_1 \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \sigma_1 rot\,\underline{u} \wedge \underline{B}$$

d'où

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma_1} rot\,rot\,\underline{H} = rot\,(\underline{u} \wedge \underline{B}).$$

En utilisant (**H2**), le champ magnétique d'induction vérifie l'équation suivante

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma_1\mu_1} rot\,rot\,\underline{B} = rot\,(\underline{u} \wedge \underline{B}).$$

Définissons un prolongement, $\underline{j}$, de la densité de courant dans l'air par

$$\underline{j} = \left\{ \begin{array}{lll} \underline{j}_d & dans & \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_N \\ 0 & dans & \Omega_0, \end{array}\right.$$

le champ magnétique d'induction est alors solution du système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \underline{B} = \mu \underline{H} & dans & \Omega \cup \Omega_1 \\ div\,\underline{B} = 0 & dans & \Omega \cup \Omega_1 \\ rot\,\underline{H} = \underline{j} & dans & \Omega \\ \dfrac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \dfrac{1}{\sigma_1\mu_1} rot\,rot\,\underline{B} = rot\,(\underline{u} \wedge \underline{B}) & dans & \Omega_1. \end{array}\right.$$

1.1.2 Les équations du mouvement

Sous hypothèse (**H1**) l'air est immobile et seul le métal liquide est en mouvement. Celui-ci est régi par les équations de Navier-Stokes incompressible suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} div\,\underline{u} = 0 \\ \rho(\underline{u}_t + (\underline{u}.\nabla)\underline{u}) + \nabla p - \eta \Delta \underline{u} = \underline{f} \end{array}\right.$$

où

ρ représente la masse volumique du métal, η sa viscosité dynamique, $\underline{u}$ sa vitesse, p la pression et $\underline{f}$ une densité volumique de force.

Cette force peut se décomposer en deux parties. Une partie gravitationnelle, notée $\underline{f}_g$, et une magnétique, notée $\underline{f}_L$, appelée force de Lorentz. Elles ont pour expression

$$\begin{aligned} \underline{f}_g &= \rho \underline{g} \\ \underline{f}_L &= q\underline{E} + \underline{j} \wedge \underline{B} \end{aligned}$$

où $\underline{g}$ est le vecteur gravité.

Donnons une autre écriture de la force de Lorentz. En prenant la divergence de l'équation (1–2) et en utilisant la loi d'Ohm nous obtenons

$$div\, \underline{j} = 0 = \sigma_1 div\, (\underline{E} + \underline{u} \wedge \underline{B})$$

$$div\, \underline{E} = -div\, (\underline{u} \wedge \underline{B})$$

d'où l'expression de la charge q

$$q = -\varepsilon_1 div\, (\underline{u} \wedge \underline{B}).$$

Finalement la force de Lorentz s'écrit :

$$\underline{f}_L = \frac{1}{\mu_1} rot\, \underline{B} \wedge \underline{B} - \varepsilon_1 div\, (\underline{u} \wedge \underline{B}) \underline{E}$$

d'où l'expression de la force

$$\underline{f} = \rho \underline{g} + \frac{1}{\mu_1} rot\, \underline{B} \wedge \underline{B} - \varepsilon_1 div\, (\underline{u} \wedge \underline{B}) \underline{E}$$

Si $\underline{g} = -g\underline{e}_z$ où $\underline{e}_z$ est le vecteur unitaire dans la direction verticale et comme

$$rot\, \underline{B} \wedge \underline{B} = (\underline{B}.\nabla)\underline{B} - \frac{1}{2}\nabla \underline{B}^2$$

nous obtenons l'expression suivante pour la force :

$$\underline{f} = -\nabla(\rho g z + \frac{1}{2\mu_1}\underline{B}^2) + \frac{1}{\mu_1}(\underline{B}.\nabla)\underline{B} - \varepsilon_1 div\, (\underline{u} \wedge \underline{B})\underline{E}.$$

1.2 Les conditions aux limites

1.2.1 Conditions inducteur-air

Entre les inducteurs, notés ind, et l'air, la composante normale du champ magnétique d'induction est continue et on impose en plus une condition dite de conducteur parfait. Cela se traduit par les conditions aux limites suivantes

$$\left.\begin{aligned} [\underline{B}.\underline{n}]_{ind}^{air} &= 0 \\ [\underline{H} \wedge \underline{n}]_{ind}^{air} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ sur } \partial\Omega_i \quad \text{pour } i = 2, \ldots, N$$

où $[\phi]_{ind}^{air} = \phi^{air} - \phi^{ind}$ représente le saut de la quantité ϕ entre l'air et les inducteurs.

1.2.2 Conditions métal-air

L'interface métal-air est représentée par l'équation :

$$F(\underline{x}, t) = 0. \tag{1–3}$$

L'évolution de cette interface est régi par

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \underline{u}.\nabla F = 0.$$

Cette équation est obtenu en disant que les particules sur la surface libre, reste sur cette surface, c'est une hypothèse courante dans les milieux continus.

Définissons la normale à F en $(\underline{x}, t)$ par

$$\underline{n}(\underline{x}, t) = \frac{\nabla_x F}{||\nabla_x F||}$$

alors nous avons

$$\underline{u}.\underline{n} = \frac{1}{||\nabla_x F||}\frac{\partial F}{\partial t} = v_n = \text{ vitesse normale de déplacement de l'interface.}$$

Pour le champ magnétique d'induction nous avons les mêmes conditions que celles entre l'air et les inducteurs, c'est-à-dire :

$$[\underline{B}.\underline{n}]_{air}^{métal} = 0 \text{ et } [\underline{H} \wedge \underline{n}]_{air}^{métal} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega_1.$$

De plus nous avons la condition suivante traduisant l'équilibre entre les contraintes et les forces de tension superficielle :

$$[\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}]_{métal}^{air} = \gamma C_{a,m}\underline{n}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes, $\underline{n}$ la normale extérieure à $\partial\Omega_1$, γ la tension superficielle et $C_{a,m} = 2H_{a,m} = div\,\underline{n} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$, avec R_i^{-1} les courbures principales, $H_{a,m}$ la courbure moyenne orientée dans le sens opposé à la normale [2].

Le tenseur des contraintes se décompose en deux parties dans le métal, une partie visqueuse, $\underline{\underline{\sigma}}^\eta$, et une magnétique, $\underline{\underline{\sigma}}^m$. Par contre dans l'air on a seulement la partie magnétique. Nous avons donc

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^\eta + \underline{\underline{\sigma}}^m,$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^\eta$ est le tenseur visqueux défini par

$$\sigma_{i,j}^\eta = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

et $\underline{\underline{\sigma}}^m$ le tenseur magnétique par

$$\sigma_{i,j}^m = \mu H_i H_j - \frac{\mu}{2}\underline{H}.\underline{H}\delta_{ij}.$$

Remarque : La partie magnétique de la force de Lorentz peut s'exprimer directement en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}^m$ car

$$div\,\underline{\underline{\sigma}}^m = \mu_1 rot\,\underline{H} \wedge \underline{H}$$

d'où

$$\underline{f}_L = div\,\underline{\underline{\sigma}}^m - \varepsilon_1 div\,(\underline{u} \wedge \underline{B})\underline{E}.$$

1.2.3 Condition à l'infini

La formule de "Biot et Savart" nous dit que le champ magnétique est donné par

$$\underline{H}(\underline{x}) = \int_K \frac{\underline{x} - \underline{y}}{|\underline{x} - \underline{y}|^d} \wedge \underline{j}(\underline{y})dy.$$

Si $div\,\underline{j} = 0$, $supp(\underline{j})$ borné et $\int_{\mathbb{R}^d} |\underline{j}|^2 < +\infty$ alors $\underline{H}$ vérifie $rot\,\underline{H} = \underline{j}$ et $div\,\underline{H} = 0$. Cette formule est valable point par point lorsque $\underline{x} \notin supp(\underline{j})$ et au voisinage d'un point où $\underline{j}$ est continue. L'expression de $\underline{H}$ nous donne la condition à l'infini suivante

$$\lim_{||\underline{x}|| \to +\infty} ||\underline{H}(\underline{x})|| = 0.$$

2. cela revient à dire qu'un rayon de courbure principale, R_i, est positif si son centre de courbure associé se trouve dans le métal.

1.3 Récapitulatif

Résumons ici les équations et les hypothèses que nous avons faites dans notre problème de magnétohydrodynamique. L'hypothèse de base (**H4**) se traduit par

$$\frac{\varepsilon\omega}{\sigma} << 1.$$

De plus nous supposons les relations linéaires suivantes

$$\underline{D} = \varepsilon\underline{E}, \quad \underline{B} = \mu\underline{H}, \quad \underline{j} = \sigma\underline{E}_t$$

dans les divers milieux.

Les équations à l'extérieur du métal sont

$$\left\{ \begin{array}{rcl} rot\,\underline{H} & = & \underline{j} \\ div\,\underline{B} & = & 0 \end{array} \right. \tag{1–4}$$

et dans le métal

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \dfrac{1}{\sigma_1\mu_1} rot\,rot\,\underline{B} = rot\,(\underline{u} \wedge \underline{B}) \\ div\,\underline{B} = 0 \\ div\,\underline{u} = 0 \\ \rho(\dfrac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u}.\nabla)\underline{u}) + \nabla p - \eta\Delta\underline{u} = \underline{f} \end{array} \right. \tag{1–5}$$

avec

$$\underline{f} = \rho\underline{g} + \frac{1}{\mu_1} rot\,\underline{B} \wedge \underline{B} - \varepsilon_1 div\,(\underline{u} \wedge \underline{B})\underline{E}. \tag{1–6}$$

Les conditions aux limites sont

$$\begin{array}{ll} [\underline{B}.\underline{n}] = 0 & sur \;\; \partial\Omega_i \;\; pour \;\; i = 1, ..., N \\ [\underline{H} \wedge \underline{n}] = 0 & sur \;\; \partial\Omega_i \;\; pour \;\; i = 1, ..., N \\ \underline{u}.\underline{n} = v_n & sur \;\; \partial\Omega_1 = \{x/F(x,t) = 0\} \\ [(\underline{\underline{\sigma}}^\eta + \underline{\underline{\sigma}}^m)\underline{n}] = \gamma C_{a,m}\underline{n} & sur \;\; \partial\Omega_1. \end{array} \tag{1–7}$$

1.4 Mise adimensionnelle

On note par :

ω_0 : le maximum des fréquences de la densité de courant imposée dans les inducteurs.

J_0 : le maximum de la densité de courant imposé dans les inducteurs.

L_0 : le rayon de la sphère de volume V_0, on a alors $L_0 = (\frac{V_0}{\omega_d})^{1/d}$ où d est la dimension et ω_d le volume de la sphère unité dans $\mathbb{R}^d$ et V_0 le volume initial du métal liquide.

Les coordonnées d'espace sont normalisées par L_0, le temps par $1/\omega_0$, le champ magnétique d'induction par $B_0 = \mu_0 J_0\, L_0$, le champ magnétique par $H_0 = J_0 L_0$, la courbure par L_0^{-1}, la vitesse par U_0 [3], la pression par P_0, le champ électrique par $\omega_0 B_0 L_0$.

Pour des facilités de lecture on utilisera les mêmes symboles pour les quantités adimensionnalisées et celles avec une dimension.

Introduisons la fonction χ représentant les perméabilités relatives définie par

$$\chi(\underline{x}) = \chi_i := \frac{\mu_i}{\mu_0} \qquad \text{si } \underline{x} \in \Omega_i, \; i = 0, \ldots, N.$$

3. vitesse de référence qu'il faudra préciser ultérieurement.

1.4.1 Equations

En effectuant les changements de variables ci-dessus dans le système (1–4)-(1–7) on obtient dans tout l'espace la relation suivante

$$\underline{B} = \chi\, \underline{H},$$

pour l'air et les inducteurs

$$\begin{array}{rcl} rot\, \underline{H} & = & \underline{j} \\ div\, \underline{B} & = & 0, \end{array}$$

et pour le métal

$$\mu_0 J_0 L_0 \omega_0\, \underline{B}_t + \frac{1}{\mu_1 \sigma_1} \frac{\mu_0 J_0 L_0}{L_0^2}\, rot\, rot\, \underline{B} = \frac{U_0 \mu_0 J_0 L_0}{L_0}\, rot\, (\underline{u} \wedge \underline{B})$$

$$\underline{B}_t + \frac{1}{\mu_1 \sigma_1 L_0^2 \omega_0} rot\, rot\, \underline{B} = \frac{U_0}{L_0 \omega_0} rot\, (\underline{u} \wedge \underline{B}).$$

En introduisant le nombre de Reynolds magnétique Re_m et le paramètre d'écran α^{-1} définis par

$$Re_m = \mu_1 \sigma_1 L_0 U_0 \qquad \alpha = (\mu_1 \sigma_1 L_0^2 \omega_0)^{-1},$$

l'équation du champ magnétique dans le métal devient :

$$\underline{B}_t + \alpha\, rot\, rot\, \underline{B} = \alpha Re_m\, rot\, (\underline{u} \wedge \underline{B}).$$

Pour la force de Lorentz on a

$$\begin{array}{rcl} \underline{f}' & = & \dfrac{1}{\mu_1} rot'\, \underline{B}' \wedge \underline{B}' - \varepsilon_1\, div'\, (\underline{u}' \wedge \underline{B}')\underline{E}' \\ & = & \dfrac{1}{\mu_1 L_0} (\mu_0 J_0 L_0)^2 rot\, \underline{B} \wedge \underline{B} - \varepsilon_1 \dfrac{U_0 \mu_0 J_0 L_0}{L_0}\, \mu_0 \omega_0 J_0 L_0^2\, div(\underline{u} \wedge \underline{B})\underline{E} \\ & = & \mu_0 J_0^2 L_0 \dfrac{\mu_0}{\mu_1} \left(rot\, \underline{B} \wedge \underline{B} - \varepsilon_1 \omega_0 U_0 \mu_0 L_0\, div(\underline{u} \wedge \underline{B})\underline{E}\right) \\ & = & \mu_0 J_0^2 L_0 \chi_1^{-1} \left(rot\, \underline{B} \wedge \underline{B} - \dfrac{\varepsilon_1 \omega_0}{\sigma_1} Re_m\, div(\underline{u} \wedge \underline{B})\underline{E} \right). \end{array}$$

Et avec des notations évidentes

$$\underline{f}'_L = \mu_0 J_0^2 L_0 \underline{f}_L = \frac{B_0^2}{\mu_0 L_0} \underline{f}_L.$$

Maintenant nous pouvons adimensionnaliser les équations de Navier-Stokes.
L'équation de continuité devient

$$div\, \underline{u} = 0 \qquad \text{dans } \Omega_1$$

Pour l'équation du mouvement on a :

$$\rho[U_0 \omega_0 \underline{u}_t + \frac{U_0^2}{L_0} (\underline{u}.\nabla)\underline{u}] + \frac{P_0}{L_0} \nabla p - \frac{\eta U_0}{L_0^2} \Delta \underline{u} = -\rho g \underline{e}_z + \frac{B_0^2}{\mu_0 L_0} \underline{f}_L.$$

Définissons le nombre d'Hartman, H_a, par $H_a = B_0 L_0 (\frac{\sigma_1}{\eta})^{1/2}$, et multiplions l'équation ci-dessus par $\mu_0 L_0 B_0^{-2}$ alors

$$\rho \frac{U_0 \omega_0 \mu_0 L_0}{B_0^2} \underline{u}_t + \rho \frac{U_0^2 \mu_0}{B_0^2} (\underline{u}.\nabla)\underline{u} + \frac{P_0 \mu_0}{B_0^2} \nabla p - \frac{\eta \mu_0 U_0}{B_0^2 L_0} \Delta \underline{u} = -\frac{\rho \mu_0 L_0 g}{B_0^2} \underline{e}_z + \underline{f}_L$$

or

$$\frac{\eta \mu_0 U_0}{B_0^2 L_0} = \frac{\eta \mu_0 Re_m}{\mu_1 \sigma_1 L_0 B_0^2 L_0} = \frac{\eta}{\chi_1 \sigma_1 B_0^2 L_0} Re_m = R_{em} H_a^{-2} \chi_1^{-1}$$

et donc

$$\frac{\rho U_0^2 \mu_0}{B_0^2} [\frac{\omega_0 L_0}{U_0} \underline{u}_t + \underline{u}.\nabla \underline{u}] + \frac{P_0 \mu_0}{B_0^2} \nabla p - \frac{Re_m}{\chi_1 H_a^2} \Delta \underline{u} = -\frac{\rho \mu_0 L_0 g}{B_0^2} \underline{e}_z + \underline{f}_L$$

Introduisons les nombres suivants :

$$\begin{array}{rcll}
P_m & = & \dfrac{B_0^2}{\mu_0} & = \text{pression magnétique} \\
E_m & = & \dfrac{P_m}{\rho U_0^2} & = \text{nombre d'euler magnétique} \\
 & & & = \dfrac{\text{variation de pression magnétique}}{\text{variation de pression hydrodynamique}} \\
Ag & = & \dfrac{B_0}{\sqrt{\rho\mu_0}} & = \text{vitesse d'Alfven} \\
L_e & = & \dfrac{\sqrt{gL_0\rho\mu_0}}{B_0} & = \text{nombre de lévitation} = \dfrac{\text{vitesse de chute libre}}{\text{vitesse d'alfven}} \\
St_m & = & \dfrac{U_0}{L_0\omega_0} & = \text{nombre de Stroul magnétique}
\end{array}$$

alors l'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\frac{1}{E_m}[\frac{1}{\alpha Re_m}\underline{u}_t + (\underline{u}.\nabla)\underline{u}] + \frac{P_0}{P_m}\nabla p - \frac{Re_m}{\chi_1 H_a^2}\Delta\underline{u} = -L_e^2\underline{e}_z + \underline{f}_L.$$

1.4.2 Conditions aux limites

Il existe deux grands types de frontières, celle entre l'air et le métal qui est une frontière libre et celle entre l'air et les inducteurs qui est fixe.

- Air - inducteur

$$[\underline{B}.\underline{n}]_{air}^{ind} = 0$$

$$[\underline{H} \wedge \underline{n}]_{air}^{ind} = 0.$$

- Air - métal

$$F(\underline{x}, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \alpha Re_m \underline{u}.\nabla F = 0,$$

$$[\underline{B}.\underline{n}]_{air}^{métal} = 0 \ \text{ et } \ [\underline{B} \wedge \underline{n}]_{air}^{métal} = 0.$$

Pour le tenseur on a :

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}_{ij} &= -P_0 p\delta_{ij} + \eta\frac{U_0}{L_0}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial xi}) + \mu_1^{-1}B_0^2 B_i B_j - \frac{1}{2\mu_1}B_0^2(\underline{B}.\underline{B})\delta_{ij} \\
&= \frac{B_0^2}{\mu_0}[-\frac{P_0}{P_m}p\delta_{ij} + \underbrace{\frac{\eta\mu_0 U_0}{B_0^2 L_0}}_{\frac{Re_m}{\chi H_a^2}}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial xi}) + \chi^{-1}B_i B_j - \frac{1}{2\chi}(\underline{B}.\underline{B})\delta_{ij}] \\
&= \frac{B_0^2}{\mu_0}\sigma_{ij}
\end{aligned}$$

La condition d'équilibre des contraintes devient

$$\frac{B_0^2}{\mu_0}[\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}]_m^a = L_0^{-1}\gamma C_{a,m}\underline{n}.$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}]_m^a = \frac{\mu_0\gamma}{L_0 B_0^2}C_{a,m}\underline{n} = WL_e^2 C_{a,m}\underline{n}$$

où W est le nombre de Weber défini par, $W = \dfrac{\gamma}{\rho g L_0^2}$.

Remarque On peut aussi introduire la constante capillaire, a, définie par $a = (\gamma(\rho g)^{-1})^{1/2}$. Le nombre de Weber devient $W = a^2 L_0^{-2}$.

1.5 Récapitulatif

On introduit les paramètres suivants

$$\begin{array}{lll} \chi_i = \dfrac{\mu_i}{\mu_0} & \alpha = (\mu_1\sigma_1 L_0^2\omega_0)^{-1} & Re_m = \mu_1\sigma_1 L_0 U_0 \\ P_m = B_0^2\mu_0^{-1} & W = \gamma(\rho g L_0^2)^{-1} & L_e^2 = P_m^{-1} g L_0 \rho \\ E_m = P_m(\rho U_0^2)^{-1} & H_a = B_0 L_0 (\dfrac{\sigma_1}{\eta})^{\frac{1}{2}}. & St_m = \alpha Re_m = U_0(L_0\omega_0)^{-1} \end{array} \tag{1-8}$$

Les équations sont

$$\underline{B} = \chi_i \underline{H} \quad \text{dans } \Omega_i \text{ pour } i = 0, ..., N$$

- air-inducteurs

$$\left\{ \begin{array}{lcl} rot\,\underline{H} & = & \underline{j} \\ div\,\underline{B} & = & 0 \end{array} \right. \tag{1-9}$$

- métal

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \alpha\, rot\, rot\, \underline{B} = \alpha Re_m rot\,(\underline{u} \wedge \underline{B}) \\ div\,\underline{B} = 0 \\ div\,\underline{u} = 0 \\ \dfrac{1}{E_m}\left(\dfrac{1}{\alpha Re_m}\underline{u}_t + (\underline{u}.\nabla)\underline{u}\right) + \dfrac{P_0}{P_m}\nabla p - \dfrac{Re_m}{\chi_1 {H_a}^2}\Delta\underline{u} = -L_e^2\underline{e}_z + \underline{f}_L \end{array} \right. \tag{1-10}$$

avec

$$\underline{f}_L = \frac{1}{\chi_1} rot\,\underline{B} \wedge \underline{B} - \frac{\varepsilon_1\omega_0}{\sigma_1\chi_1} Re_m div\,(\underline{u} \wedge \underline{B})\underline{E} \tag{1-11}$$

$$\sigma_{i,j} = -\frac{P_0}{P_m} p\delta_{i,j} + \frac{Re_m}{\chi H_a^2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \chi^{-1} B_i B_j - \frac{1}{2\chi}\underline{B}.\underline{B}\delta_{i,j} \tag{1-12}$$

Les conditions aux limites sont
air - inducteurs (frontière fixe)

$$[\underline{B}.\underline{n}]_{air}^{ind} = 0 \quad \text{et} \quad [\underline{H} \wedge \underline{n}]_{air}^{ind} = 0 \tag{1-13}$$

air - métal (frontière libre)

$$F(\underline{x}, t) = 0 \tag{1-14}$$

$$[\underline{B}.\underline{n}]_m^a = 0 \quad \text{et} \quad [\underline{H} \wedge \underline{n}]_m^a = 0 \tag{1-15}$$

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial F}{\partial t} + \alpha Re_m \underline{u}.\nabla F = 0 \\ [\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}]_m^a = W L_e^2 C_{a,m}\underline{n} \end{array} \tag{1-16}$$

D'après l'hypothèse (**H4**) (i.e. $\frac{\varepsilon\omega_0}{\sigma} << 1$) on peut, pour des nombres de Reynolds magnétiques tels que $\frac{\varepsilon_1\omega_0}{\sigma_1} Re_m << 1$ [4], obtenir la forme simplifiée de la force de Lorentz suivante

$$\underline{f}_L = rot\,\underline{B} \wedge \underline{B} = div\,\underline{\underline{\sigma}}^m.$$

Remarque La condition $\frac{\varepsilon_1\omega_0}{\sigma_1} Re_m << 1$, nous impose la restriction suivante sur l'ordre de grandeur de la vitesse de référence du mouvement

$$U_0 << \frac{1}{\varepsilon_1\omega_0\mu_1 L_0}.$$

4. cela revient à s'interdire le cas $Re_m >> 1$.

2 Approximation haute fréquence, domaine fixe : les écrans

Dans cette partie, nous supposerons que les conducteurs sont solides et fixes. Ce cas de figure correspond aux écrans magnétiques, les équations sont celles du métal ou on aura fait $\underline{u} = 0$. Le problème se simplifie en absence de frontière libre. Rappelons les principales hypothèses faites pour notre problème,

- Ω_0 est supposé non conducteur.
- Les courants de déplacement sont négligeables.
- La densité de courant $\underline{J}_d(\underline{x}, t)$ est à support dans K, et vérifie

$$div\, \underline{J}_0(\underline{x}, t) = 0.$$

2.1 Equations et mise adimensionnelle

Définissons $\underline{J}(\underline{x}, t)$ pour $\underline{x} \in \Omega = K \cup \Omega_0$ par

$$\underline{J}(\underline{x}, t) = \begin{cases} \underline{J}_d(\underline{x}, t) \text{ si } \underline{x} \in K \\ 0 \qquad\quad \text{ si } \underline{x} \in \Omega_0, \end{cases}$$

alors $(\underline{H}, \underline{B})$ va vérifier le système suivant

$$\begin{cases} div \underline{B} = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^d \\ \underline{B} = \mu \underline{H} & \text{dans} \quad \mathbb{R}^d \\ rot \underline{H} = \underline{J} & \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \dfrac{1}{\mu_1 \sigma_1} rot\, rot \underline{H} = 0 & \text{dans} \quad \Omega_1, \end{cases} \tag{2–1}$$

où $\mu(x)$ est la perméabilité magnétique définie par $\mu(x) = \mu_i$ si $\underline{x} \in \Omega_i$, avec comme conditions aux limites sur le bord du métal

$[\underline{B}.n]_{\partial\Omega_1} = 0$

$[\underline{H} \wedge n]_{\partial\Omega_1} = 0,$

et une condition initiale

$\underline{B}(\underline{x}, 0) = \underline{\varphi}(\underline{x})$ si $\underline{x} \in \Omega_1$.

Pour la mise adimensionnelle, on effectue le changement de variable suivant :

$$\underline{x} := \frac{\underline{x}'}{L_0}, \quad t := \omega_0 t', \quad \underline{B} := \underline{B}'/B_0 \text{ avec } B_0 = \mu_0 J_0 L_0,$$

le système (2–1) s'écrit

$$\begin{cases} div \underline{B} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \\ \underline{B} = \chi \underline{H} & \text{dans } \mathbb{R}^d \\ rot\, \underline{H} = \underline{J} & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \dfrac{1}{\mu_1 \sigma_1 \omega_0 L_0^2} rot\, rot \underline{B} = 0 & \text{dans } \Omega_1 \end{cases} \tag{2–2}$$

avec $\chi(\underline{x}) = \dfrac{\mu_i}{\mu_0}$ si $\underline{x} \in \Omega_i$.

Les conditions aux limites deviennent

$$[\underline{B}.\underline{n}]_{\partial\Omega_1} = 0 \tag{2–3}$$

$$[\underline{H} \wedge \underline{n}]_{\partial\Omega_1} = 0 \tag{2–4}$$

$$\lim_{||\underline{x}|| \to +\infty} ||\underline{B}(\underline{x})|| = 0 \tag{2–5}$$

$$\underline{B}(\underline{x}, 0) = \underline{\varphi}(x) \quad \text{dans } \Omega_1 \tag{2–6}$$

Nous poserons $\epsilon^2 = \alpha = (\mu_1 \sigma_1 \omega_0 L_0^2)^{-1}$. Comme nous nous intéressons à des densités de courant à haute fréquence (i.e. $\omega_0 >> 1$), ϵ est en fait le petit paramètre du système. On notera par (P_ϵ) le système défini par (2–2)-(2–6).

Remarque Le temps de diffusion dans l'écran est donné par $t = 1/(\mu_1 \sigma_1 L_0^2)$ et donc le paramètre ϵ^2 est le rapport du temps de diffusion dans l'écran sur le temps caractéristique du courant.

2.2 Comportement asymptotique

2.2.1 Approximation régulière

Pour cela on va chercher $\underline{B}_\epsilon$ sous la forme du développement en série de ϵ suivant :

$$\underline{B}_\epsilon(\underline{x},t) = \underline{B}_0(\underline{x},t) + \epsilon B_1(\underline{x},t) \tag{2–7}$$

où

$$\underline{B}_0(\underline{x},t) = \begin{cases} \underline{B}_0^{ext}(\underline{x},t) & \text{si } \underline{x} \in \Omega_0 \cup K \\ \underline{B}_0^{int}(\underline{x},t) & \text{si } \underline{x} \in \Omega_1. \end{cases}$$

On notera par (P_ϵ) le système (2–2)-(2–6). En reportant l'expression de $\underline{B}_\epsilon$ dans le système (P_ϵ), nous obtenons à l'ordre 0, le problème suivant

$$div\, \underline{B}_0 = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \tag{2–8a}$$

$$\underline{B}_0 = \chi \underline{H}_0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \tag{2–8b}$$

$$rot\, \underline{H}_0^{ext} = \underline{J} \qquad \text{dans } \Omega \tag{2–8c}$$

$$\frac{\partial \underline{B}_0^{int}}{\partial t} = 0 \qquad \text{dans } \Omega_1. \tag{2–8d}$$

Pour les conditions aux limites on a

$$[\underline{B}_\epsilon.\underline{n}] = 0 = [\underline{B}_0.\underline{n}] + \epsilon[\underline{B}_1.\underline{n}] \tag{2–9}$$

et

$$[\underline{H}_\epsilon \wedge \underline{n}] = 0 = [\underline{H}_0 \wedge \underline{n}] + \epsilon[\underline{H}_1 \wedge \underline{n}] \tag{2–10}$$

Les conditions aux limites doivent être satisfaites à tous les ordres du développement. Nous obtenons ainsi à l'ordre 0

$$[\underline{B}_0.\underline{n}] = 0$$

$$[\underline{H}_0 \wedge \underline{n}] = 0$$

$$\lim_{\|\underline{x}\| \to +\infty} \|\underline{B}_0(\underline{x},t)\| = 0$$

Dans Ω_1, on a la condition initiale

$$\underline{B}_\epsilon(\underline{x},0) = \underline{B}_0^{int}(\underline{x},0) + \epsilon \underline{B}_1^{int}(\underline{x},0) = \underline{\varphi}(\underline{x})$$

or nous supposons $\underline{\varphi}$ indépendant de ϵ, donc

$$\underline{B}_0^{int}(\underline{x},0) = \underline{\varphi}(\underline{x}).$$

L'équation (2–8d) nous montre que $\underline{B}_0^{int}$ est stationnaire donc

$$\underline{B}_0^{int}(\underline{x},t) = \underline{B}_0^{int}(\underline{x},0) = \underline{\varphi}(\underline{x}).$$

A l'aide des conditions aux limites et de l'expression précédente de $\underline{B}_0^{int}$ on obtient

$$\underline{B}_0^{ext}.\underline{n} = \underline{B}_0^{int}.\underline{n} = \underline{\varphi}(\underline{x}).\underline{n},$$

et

$$\underline{B}_0^{ext} \wedge \underline{n} = \frac{\underline{B}_0^{int}}{\chi_1} \wedge \underline{n} = \frac{\underline{\varphi}(\underline{x})}{\chi_1} \wedge \underline{n}$$

d'où l'expression de $\underline{B}_0^{ext}$ sur $\partial\Omega_1$:

$$\underline{B}_0^{ext}(\underline{x},t) = \underline{\Psi}(\underline{x}) \ \text{ donnée.}$$

Finalement le champ d'induction magnétique, $\underline{B}_0^{ext}$, est solution du problème extérieur

$$P_{ext}\left\{\begin{array}{rcll} div\,\underline{B}_0^{ext} &=& 0 & \text{dans} \quad \Omega=\Omega_0\cup K \\ rot\,\underline{H}_0^{ext} &=& \underline{J}(x,t) & \text{dans} \quad \Omega \\ \underline{B}_0^{ext} &=& \chi\underline{H}_0^{ext} & \text{dans} \quad \Omega \\ \underline{B}_0^{ext} &=& \underline{\Psi}(x) & \text{sur} \quad \partial\Omega_1 \\ \lim\limits_{\|\underline{x}\|\to+\infty} \underline{B}_0^{ext}(\underline{x}) &=& 0. & \end{array}\right.$$

Le problème P_{ext} n'admet pas en général de solution car il est surdéterminé. En effet la condition de Dirichlet sur $\partial\Omega_1$ est trop forte. Par contre en affaiblissant la condition à la limite par $\underline{B}_0^{ext}.\underline{n} = h(x)$, on peut montrer que le problème P_{ext} admet une unique solution.

Ce résultat implique que nous avons un problème de perturbation singulière et donc qu'il existe une couche limite dans Ω_1, au voisinage de $\partial\Omega_1$.

2.2.2 Méthode des développements raccordés

Pour trouver un développement uniforme de $\underline{B}_\epsilon$, on va utiliser la technique des développements raccordés (cf [7], [8]), pour cela il nous faut chercher $\underline{B}_\epsilon$ sous la forme :

$$\underline{B}_\epsilon(\underline{x},t) = \begin{pmatrix} \underline{B}_0^{ext}(\underline{x},t) \\ \underline{B}_0^{int}(\underline{x},t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{B}_0^{cl}(\tau_1,\tau_2,n/\epsilon,t) \end{pmatrix} + \epsilon\underline{B}_1(\underline{x},t)$$

où (τ_1, τ_2, n) représente les coordonnées dans une base locale à la surface obtenue à partir d'une paramétrisation normale de $\partial\Omega_1$. L'introduction de $\underline{B}_0^{cl}$ va nous permettre d'obtenir une approximation uniforme de $\underline{B}_\epsilon$. Pour cela il faut construire $\underline{B}_0^{cl}$ dans la couche limite et $(\underline{B}_0^{ext}, \underline{B}_0^{int})$ à l'extérieur de celle-ci.

Construction hors de la couche limite. Le terme régulier $\underline{B}_0 = (\underline{B}_0^{ext}, \underline{B}_0^{int})$ du développement de $\underline{B}_\epsilon$, satisfait aux équations précedentes hors de la couche limite. On étend la validité des équations dans celle-ci et donc $\underline{B}_0$ est solution de

$$div\,\underline{B}_0 = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \tag{2–11a}$$

$$\underline{B}_0 = \chi\underline{H}_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \tag{2–11b}$$

$$rot\,\underline{H}_0^{ext} = \underline{J} \quad \text{dans } \Omega \tag{2–11c}$$

$$\frac{\partial\underline{B}_0^{int}}{\partial t} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \tag{2–11d}$$

$$\|\underline{B}_0^{ext}(\underline{x},t)\| \to 0 \quad \text{lorsque } \|\underline{x}\|\to+\infty. \tag{2–11e}$$

Comme l'on a (2–11a) dans tout $\mathbb{R}^d$, nécessairement on doit avoir sur l'interface air-métal

$$[\underline{B}_0.\underline{n}]_{\partial\Omega_1} = 0. \tag{2–12}$$

Proposition 1 *Il existe une unique solution $\underline{B}_0 = (\underline{B}_0^{ext}, \underline{B}_0^{int})$ vérifiant le système (2–11a)-(2–11e) et (2–12).*

Preuve : comme dans Ω_1, $\underline{B}_0^{int}$ est stationnaire on a

$$\underline{B}_0^{int}(\underline{x},t) = \underline{B}_0^{int}(\underline{x},0) = \underline{\varphi}(\underline{x}).$$

On obtient la condition aux limites pour $\underline{B}_0^{ext}$ suivante

$$\underline{B}_0^{ext}.\underline{n} = \underline{\varphi}.\underline{n}.$$

Alors $\underline{B}_0^{ext}$ est solution du problème dans Ω suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} div\underline{B}_0^{ext} &=& 0 \\ \underline{B}_0^{ext} &=& \chi\underline{H}_0^{ext} \\ rot\,\underline{H}_0^{ext} &=& \underline{J} \end{array}\right.$$

et vérifie les conditions aux limites

$$\left\{\begin{array}{lcl} \underline{B}_0^{ext}.\underline{n} & = & \underline{\varphi}(\underline{x}).\underline{n} \text{ sur } \partial\Omega_1 \\ \lim\limits_{\|\underline{x}\|\to+\infty} \underline{B}_0^{ext}(\underline{x}) & = & 0. \end{array}\right.$$

Ce système admet une solution d'où l'expression de $\underline{B}_0$

$$\underline{B}_0 = (\underline{B}_0^{ext}, \underline{\varphi}(\underline{x})).$$

Construction dans la couche limite. Nous nous plaçons dans une approche bidimensionnelle (cf Annexe A–1.3), et nous supposerons que $\partial\Omega_1$ admet une paramétrisation normale.

On note par $\underline{\tau}(s)$ le vecteur, unitaire, tangent à $\partial\Omega_1$ en un point $P(s)$ de la surface et par $\underline{n}(s)$ le vecteur, unitaire, normal extérieur à $\partial\Omega_1$ en $P(s)$.

On suppose q'un point M de Ω_1 proche de sa frontière va s'écrire de façon unique sous la forme

$$M(x,y) = M(s,r) = P(s) - r\underline{n}(s).$$

On pose

$$h_1 = 1 + \rho(s)r.$$

On écrit le système (P_ϵ) en coordonnées locales (cf Annexe A–1.3) et le champ d'induction magnétique est décomposé en deux composantes, une tangentielle, B_s, et l'autre normale, notée B_n. Nous avons alors $\underline{B}_\epsilon = (B_s, B_n)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial Bs}{\partial s} + \dfrac{\partial}{\partial r} h_1 B_n = 0 \\ \dfrac{\partial B_s}{\partial t} - \epsilon^2 \left\{ \dfrac{\partial^2 B_s}{\partial r^2} + \dfrac{\partial}{\partial r}(\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial B_n}{\partial s}) + \dfrac{\partial}{\partial r}(\dfrac{B_s}{h_1}\dfrac{\partial h_1}{\partial r}) \right\} = 0 \\ \dfrac{\partial B_n}{\partial t} - \dfrac{\epsilon^2}{h_1} \left\{ \dfrac{\partial^2 B_s}{\partial r \partial s} + \dfrac{\partial}{\partial s}\dfrac{1}{h_1}(\dfrac{\partial B_n}{\partial s}) + \dfrac{\partial}{\partial s}(\dfrac{B_s}{h_1}\dfrac{\partial h_1}{\partial r}) \right\} = 0. \end{array}\right. \tag{2–13}$$

Pour les conditions aux limites on a

$$[\underline{B}_\epsilon.\underline{n}]_{\partial\Omega_1} = 0 \tag{2–14}$$

$$[\frac{\underline{B}_\epsilon}{\chi} \wedge \underline{n}]_{\partial\Omega_1} = 0 \tag{2–15}$$

et il faut les vérifier à tous les ordres.

Si $\underline{x} \in \partial\Omega_1$, alors il est de la forme $\underline{x} = s\underline{\tau}(s)$ et il a pour coordonnée $(s,0)$ dans le repère local et en se souvenant que

$$\underline{B}_\epsilon(\underline{x},t) = \left(\begin{array}{c} \underline{B}_0^{ext}(\underline{x},t) \\ \underline{B}_0^{int}(\underline{x},t) + \underline{B}_0^{cl}(s,r,t) \end{array} \right) + \epsilon(\ ),$$

et avec $\underline{B}_0^{cl} = B_s^0\underline{\tau}(s) + B_n^0\underline{n}(s)$, la condition (2–14) donne

$$[\underline{B}_\epsilon.\underline{n}]_{\partial\Omega_1} = \underline{B}_0^{ext}.\underline{n} - \underline{B}_0^{int}.\underline{n} - \underbrace{\underline{B}_0^{cl}(s,0).\underline{n}}_{B_n^0(s,0,t)} = 0$$

Par construction de $\underline{B}_0 = (\underline{B}_0^{ext}, \underline{B}_0^{int})$ nous avons

$$\underline{B}_0^{ext}.\underline{n} - \underline{B}_0^{int}.\underline{n} = 0$$

et donc

$$B_n^0(s,0) = 0.$$

La condition (2–15) s'écrit en dimension 2

$$[\underline{H}_\epsilon(\underline{x},t) \wedge \underline{n}(\underline{x})] = [\underline{H}_\epsilon(\underline{x},t).\underline{\tau}(s)] \qquad \text{avec } \underline{x} = (s,0).$$

Cette relation donne à l'ordre 0

$$[\frac{\underline{B}_0}{\chi}.\underline{\tau}]_{\partial\Omega_1} - \chi_1^{-1} B_s^0(s,0,t) = 0$$

d'où

$$B_s^0(s,0,t) = \chi_1[\frac{\underline{B_0}}{\chi}.\underline{\tau}]_{\partial\Omega_1} = \chi_1 \underline{B_0}^{ext}.\underline{\tau} - \underline{B}_0^{int}.\underline{\tau}$$

et finalement

$$B_s^0(s,0,t) = h(s,t) := \underline{\tau}(s).\left(\chi_1 \underline{B}_0^{ext}(P(s),t) - \underline{B}_0^{int}(P(s),t)\right).$$

Le raccord avec la solution intérieure va s'écrire de manière simplifiée :

$$\lim_{r\to+\infty} \underline{B}_0^{cl}(s,r) = 0 \qquad \forall s$$

où $\underline{B}_0^{cl}(s,r) = (B_s^0, B_n^0)$

La couche limite étant dans la direction normale à $\partial\Omega_1$, on va dilater l'échelle dans cette direction. Pour cela on effectue le changement de variable suivant

$$\begin{cases} s := s \\ r := r_{/\delta(\epsilon)} \qquad \text{avec } \delta(\epsilon) \to 0 \text{ lorsque } \epsilon \to 0, \end{cases}$$

dans les équations de la couche limite (2–13). Pour l'équation de la divergence cela donne

$$\frac{\partial B_s}{\partial s} - \frac{1}{\delta(\epsilon)}\frac{\partial}{\partial r}(1+\rho(s)\delta(\epsilon)r)B_n = 0.$$

A l'ordre 0, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial r}B_n^0 = 0. \tag{2–16}$$

Le champ d'induction magnétique, $(B_s,\, B_n)$, est solution de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_s}{\partial t} - \frac{\epsilon^2}{\delta^2(\epsilon)}\frac{\partial^2 B_s}{\partial r^2} - \frac{\epsilon^2}{\delta(\epsilon)}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{h_1}\frac{\partial B_n}{\partial s}) - \frac{\epsilon^2}{\delta^2(\epsilon)}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{B_s}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial r}) = 0 \\
\frac{\partial B_n}{\partial t} - \frac{\epsilon^2}{\delta(\epsilon)h_1}\frac{\partial^2 B_s}{\partial r\partial s} - \frac{\epsilon^2}{h_1}\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{h_1}(\frac{\partial B_n}{\partial s}) - \frac{\epsilon^2}{\delta(\epsilon)h_1}\frac{\partial}{\partial s}(\frac{B_s}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial r}) = 0.
\end{aligned}$$

on a

$$h_1 = 1 + \rho(s)\delta(\epsilon)r = 1 + \theta(\delta(\epsilon))$$

et

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial r} = \frac{\delta(\epsilon)\rho(s)}{1+\rho(s)\delta(\epsilon)r} = \delta(\epsilon)\rho(s) + \theta(\delta(\epsilon)).$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial r}\right) = \left(\frac{\delta(\epsilon)\rho(s)}{1+\rho(s)\delta(\epsilon)r}\right)^2 = \delta^2(\epsilon)\rho(s)^2 + \theta(\delta(\epsilon)).$$

On doit regarder le rapport $\frac{\epsilon}{\delta(\epsilon)}$ par rapport à 1 et ϵ. La seule dégénérescence significative est pour $\delta(\epsilon) = \epsilon$.

A l'ordre 0, le système ci-dessus devient :

$$\frac{\partial B_s^0}{\partial t} - \frac{\partial^2 B_s^0}{\partial r^2} = 0$$

$$\frac{\partial B_n^0}{\partial t} = 0$$

La composante normale du champ magnétique d'induction vérifie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_n^0}{\partial t} = \frac{\partial B_n^0}{\partial r} = 0 \\
B_n^0(s,0,t) = 0 \\
\lim_{r\to+\infty} B_n^0(s,r,t) = 0 \\
B_n^0(s,r,0) = \phi_n^{cl}(s,r)
\end{aligned}$$

D'après l'équation de la divergence et les conditions aux limites nous avons

$$B_n^0 = 0.$$

Pour avoir l'existence on la condition initiale doit satisfaire $\phi_n^{cl}(s,r) = 0 \quad \forall s, r$. Sinon on n'a pas la continuité en $t = 0$.

La composante tangentielle va satisfaire au système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_s^0}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 B_s^0}{\partial r^2} = 0 \\ B_s^0(s,0,t) = h(s,t) \\ B_s^0(s,r,0) \quad \text{donnée.} \end{cases}$$

La condition de raccord implique

$$\lim_{r\to+\infty} B_s^0(s,r,t) = 0.$$

Finalement

Proposition 2 *Le champ d'induction magnétique couche limite, $\underline{B}_0^{cl} = (B_s^0, B_n^0)$, est solution de*

$$\begin{cases} B_n^0 = 0 \\ \dfrac{\partial B_s^0}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 B_s^0}{\partial r^2} = 0 \\ B_s^0(s,0,t) = h(s,t) \\ B_s^0(s,r,0) \quad \textit{donnée.} \\ \lim\limits_{r\to+\infty} B_s^0(s,r,t) = 0. \end{cases}$$

Récapitulatif

Proposition 3 *L'approximation uniforme de $\underline{B}_\epsilon$ est donnée par*

$$\underline{B}_\epsilon = \underline{B}_0 + \underline{B}_0^{cl} + o(1)$$

où $\underline{B}_0 = (\underline{B}_0^{ext}, \underline{B}_0^{int})$ est solution de

$$\begin{aligned} \underline{B}_0 &= \chi \underline{H}_0 && \textit{dans } \mathbb{R}^d && \text{(2–17a)} \\ \textit{div } \underline{B}_0^{ext} &= 0 && \textit{dans } \Omega && \text{(2–17b)} \\ \textit{rot } \underline{H}_0^{ext} &= \underline{J} && \textit{dans } \Omega && \text{(2–17c)} \\ \|\underline{B}_0^{ext}(\underline{x},t)\| &\to 0 && \textit{lorsque } \|\underline{x}\| \to +\infty && \text{(2–17d)} \\ B_0^{ext}(\underline{x}) &= \underline{\varphi}(\underline{x}).\underline{n} && . && \text{(2–17e)} \end{aligned}$$

et

$$\underline{B}_0^{int}(\underline{x},t) = \underline{\varphi}(\underline{x}),$$

l'approximation de couche limite $\underline{B}_0^{cl} = (\underline{B}_s^0, \underline{B}_n^0)$ est donnée par

$$\begin{cases} B_n^0 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial B_s^0}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 B_s^0}{\partial r^2} = 0 \\ B_s^0(s,0,t) = h(s,t) \\ B_s^0(s,r,0) = \quad \textit{donnée.} \\ \lim\limits_{r\to+\infty} B_s^0(s,r,t) = 0. \end{cases}$$

2.3 Cas particulier : champ en régime harmonique

On se donne la densité de courant, $\underline{J}(\underline{x},t)$ sous la forme

$$\underline{J}(\underline{x},t) = \underline{\tilde{J}}(\underline{x})\cos(t+\phi) = \Re(\underline{\mathbb{J}}(\underline{x})e^{it})$$

avec $\mathbb{J}(\underline{x})$ complexe. Nous supposons que l'on puisse trouver des solutions, $\underline{B}_\epsilon$, de la même forme $\underline{B}_\epsilon(\underline{x},t) = \Re(\underline{B}_\epsilon(\underline{x})e^{it})$ avec $\underline{B}_\epsilon(\underline{x})$ complexe.

Proposition 4 *Le premier terme, $\underline{\tilde{B}}_0$, du développement de $\underline{B}_\epsilon$ est donné par $\underline{\tilde{B}}_0 = \Re(\underline{B}_0)$ où*

$$\underline{B}_0(\underline{x},t) = \begin{pmatrix} \underline{B}_0^{ext}(\underline{x})\, e^{it} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_1 B_0^{ext}(S)e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{r}{\epsilon}}\ e^{i(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{r}{\epsilon})} \end{pmatrix} \underline{\tau}(s)$$

où B_0^{ext} est solution de

$$(P_0^{ext}) \quad \begin{cases} div\, \underline{B}_0^{ext} = 0 & dans \quad \Omega \\ rot\, \underline{H}_0^{ext} = \underline{\mathbb{J}}(\underline{x}) & dans \quad \Omega \\ \underline{B}_0^{ext}.\underline{n} = 0 & sur \quad \partial\Omega_1 \\ \lim_{\|\underline{x}\|\to+\infty} ||\underline{B}(\underline{x})|| = 0, & \end{cases}$$

et $B_0^{ext}(S) = \underline{B}_0^{ext}(P(s)).\underline{\tau}(s)$.

Preuve. D'après (2–11) on a $\underline{B}_0^{int} \equiv 0$ et $\underline{B}_0^{ext}$ solution de (P_0^{ext}). Dans la couche limite d'après la proposition 2, on a $\underline{B}_0 = (B_s, 0)$ solution de

$$iB_s - \frac{\partial^2 B_s}{\partial r^2} = 0.$$

La composante tangentielle a pour expression

$$B_s(s,r) = a(s)e^{\alpha_+ r} + b(s)e^{\alpha_- r}$$

avec $\alpha_\pm = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \pm e^{i\pi/4}$ et doit vérifier

$$B_s(s,0) = \chi_1 \underline{B}_0^{ext}(\underline{x}).\underline{\tau}(\underline{x}) = \chi_1 B_0^{ext}(S).$$

On cherche B_s tel que $\lim_{r\to+\infty} B_s(s,r) = 0$ alors

$$a(s) = 0$$

et donc

$$B_s(s,r) = \chi_1 B_0^{ext}(S)e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)r}$$

d'où la proposition.

3 Approximation Haute fréquence, domaine variable : le métal

Revenons maintenant au problème initial qui est à frontière libre défini par le sytème (1–8)-(1–16) Nous nous plaçons sous les hypothèses, décrites dans §1, suivantes

- L'air est supposé non conducteur et en équilibre hydrostatique **(H1)**.
- Les courants de déplacement sont négligeables **(H4)**.
- Les caractéristiques des matériaux sont constantes par sous domaines.
- La densité de courant $\underline{J}_0(\underline{x}, t)$ est à support dans K et vérifie

$$div\underline{J}_0(\underline{x}, t) = 0 \text{ dans } K.$$

Nous définissons $\underline{J}$ par :

$$\underline{J}(\underline{x}, t) = \begin{cases} \underline{J}_0(\underline{x}, t) & \text{si} \quad \underline{x} \in K, \\ 0 & \text{si} \quad \underline{x} \in \Omega_0. \end{cases}$$

Notre problème est :

Trouver $\Omega_1(t), \underline{B}$ dans $\mathbb{R}^d$, $(\underline{u}, p)$ dans $\Omega_1(t)$ solution de

$$(P_\epsilon) \quad \begin{cases} div\underline{B} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \\ \underline{B} = \chi \underline{H}(\underline{x}) & \text{dans } \mathbb{R}^d \\ rot\,\underline{H} = \underline{J}(\underline{x}, t) & \text{dans } \Omega(t) \\ \dfrac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \epsilon^2\, rot\, rot \underline{B} = \epsilon^2 Re_m\, rot\,(\underline{u} \wedge \underline{B}) & \text{dans } \Omega_1(t) \\ div\,\underline{u} = 0 & \text{dans } \Omega_1(t) \\ \dfrac{1}{E_m}\{\dfrac{1}{\epsilon^2 Re_m}\dfrac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u}.\nabla)\underline{u}\} + \dfrac{P_0}{P_m}\nabla p - \dfrac{Re_m}{\chi_1 H_a^2}\Delta \underline{u} = -L_e^2 \underline{e}_z + \underline{f}_L & \text{dans } \Omega_1(t) \end{cases}$$

avec $\chi(\underline{x}) = \chi_i$ si $\underline{x} \in \Omega_i$ et $\underline{f}_L = \dfrac{1}{\chi_1} rot\,\underline{B} \wedge \underline{B}$,
de plus ils vérifient les conditions aux limites

- sur l'interface air-métal, $\partial\Omega_1(t)$

$$\begin{aligned} F(\underline{x}, t) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \epsilon^2 Re_m \underline{u}.\nabla F &= 0 \\ [\underline{B}.\underline{n}]_a^m &= 0 \\ [\underline{H} \wedge \underline{n}]_m^a &= 0 \\ [\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}]_m^a &= L_e^2 W C_{a,m} \underline{n} \end{aligned}$$

où

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\frac{P_0}{P_m} p \underline{\underline{\mathbb{I}}} + \frac{2Re_m}{\chi H_a^2}\underline{\underline{E}}(\underline{u}) + \chi^{-1}\underline{B} \otimes \underline{B} - \frac{1}{2\chi} B^2 \underline{\underline{\mathbb{I}}}$$

et $\underline{\underline{\mathbb{I}}}$ représente le tenseur identité, $\underline{\underline{E}}(\underline{u})$ le tenseur des taux de déformation défini par

$$\underline{\underline{E}}(\underline{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}),$$

- à l'infini

$$\lim_{\|\underline{x}\| \to +\infty} \|\underline{B}(\underline{x})\| = 0,$$

et les conditions initiales

$F(\underline{x},0) = \overline{F}(\underline{x}) = 0$ et donc $\partial\Omega_1(0) = \{\underline{x}/\overline{F}(\underline{x}) = 0\}$,
$\underline{B}(\underline{x},0) = \underline{\varphi}_b(\underline{x})$,
$\underline{u}(\underline{x},0) = \underline{\varphi}_u(\underline{x})$,
$p(\underline{x},0) = \varphi_p(\underline{x})$.

Remarques : les conditions initiales peuvent provenir d'une situation d'équilibre auquel cas nous nous intéressons à son évolution pour des temps petits.

Le système que nous étudions possède deux petits paramètres : l'inverse du paramètre d'écran, ϵ^2, et le nombre de Reynolds magnétique, Re_m, définis par

$$\epsilon^2 = (\mu_1\sigma_1\omega_0 L_0^2)^{-1}$$

$$Re_m = \mu_1\sigma_1 L_0 U_0.$$

Les autres sont

$$B_0 = \mu_0 J_0 L_0,\ P_m = B_0^2\mu_0^{-1},\ E_m = \frac{P_m}{\rho U_0^2},\ H_a = B_0 L_0(\frac{\sigma_1}{\eta})^{1/2},$$

$$L_e^2 = gL_0\rho\mu_0 B_0^{-2}, \quad W = \frac{\gamma}{\rho g L_0^2}.$$

Nous supposerons dans l'équation du mouvement que le coefficient prépondérant est ϵ^{-2} par rapport à $D = \frac{E_m}{\chi_1}(\frac{Re_m}{H_a})^2$. C'est à dire il faut $\omega_0 >> \eta\rho^{-1}L_0^{-2}$, ce qui est le cas pour les hautes fréquences. Le problème possède aussi, deux temps caractéristiques, celui de pulsation du champ magnétique, t_m, et celui de relaxation du métal liquide, t_f, ayant pour définitions

$$t_m = \frac{1}{\omega_0} \qquad\qquad t_f = \frac{1}{\omega_f} \ \text{ où } \omega_f = \frac{U_0}{L_0}$$

avec des ordres de grandeur très différents. Pour le cas des hautes fréquences nous avons $\omega_0 \gg \omega_f$. En effet

$$\frac{\omega_f}{\omega_0} = \epsilon^2 Re_m$$

qui par hypothèse est très petit. Le choix de la fréquence de référence pour la mise adimensionnelle des équations ci-dessus se fait en fonction du phénomène à étudier : ω_0 pour l'aspect magnétique, ω_f pour la mise en forme du métal en tenant compte du fluide.

Remarque On pourrait aussi introduire le temps carractéristique des ondes capillaires sur la surface libre du métal, défini par $t_c = (\gamma\rho L_0^3)^{-1/2}$, comme temps caractéristique pour le fluide.

3.1 Comportement asymptotique : temps court

Le temps caractéristique est ω_0^{-1}, avec $\omega_0 \sim 2\pi\, 10^5$ Hz, donc nous nous intéressons au comportement pour des temps très petits.

3.1.1 Approximation régulière

Le problème est un problème à frontière libre, nous supposons que celle-ci s'écrive sous la forme

$$F_\epsilon(\underline{x},t) = F_0(\underline{x},t) + \epsilon F_1(\underline{x},t) \tag{3–1}$$

et que Ω_1^ϵ est décrit à l'ordre i par Ω_1^i. On cherche $\underline{B}_\epsilon, \underline{u}_\epsilon$ et p_ϵ sous la forme

$$\underline{B}_\epsilon = \underline{B}_0 + \epsilon\underline{B}_1,$$

$$\underline{u}_\epsilon = \underline{u}_0 + \epsilon\underline{u}_1,$$

$$p_\epsilon = p_0 + \epsilon p_1,$$

avec

$$\underline{B}_i = \begin{cases} \underline{B}_i^{ext} & \text{si} \quad \underline{x} \in \Omega^i(t) = \mathbb{R}^d \backslash \Omega_1^i(t) \\ \underline{B}_i^{int} & \text{si} \quad \underline{x} \in \Omega_1^i(t). \end{cases}$$

De la même façon le tenseur des contraintes se décompose en

$$\underline{\underline{\sigma}}_\epsilon = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \epsilon\, \underline{\underline{\sigma}}_1$$

avec

$$\underline{\underline{\sigma}}_0 = -\frac{P_0}{P_m} p_0 \underline{\underline{\mathbb{I}}} + \frac{2Re_m}{\chi H_a^2} \underline{\underline{E}}(\underline{u}_0) + \chi^{-1} \underline{B}_0 \otimes \underline{B}_0 - \frac{1}{2\chi} \underline{B}_0^2 \underline{\underline{\mathbb{I}}}.$$

En reportant les expressions de $\underline{B}_\epsilon, \underline{u}_\epsilon, p_\epsilon, F_\epsilon$, dans (P$_\epsilon$), nous obtenons pour l'approximation d'ordre 0, le système suivant

$$div \underline{B}_0 = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \tag{3–2a}$$

$$\underline{B}_0 = \chi \underline{H}_0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \tag{3–2b}$$

$$rot\, \underline{H}_0 = \underline{J} \qquad \text{dans } \Omega^0(t) \tag{3–2c}$$

$$\frac{\partial \underline{B}_0}{\partial t} = 0 \qquad \text{dans } \Omega_1^0(t) \tag{3–2d}$$

$$\frac{\partial \underline{u}_0}{\partial t} = 0 \qquad \text{dans } \Omega_1^0(t) \tag{3–2e}$$

$$div\, \underline{u}_0 = 0 \qquad \text{dans } \Omega_1^0(t) \tag{3–2f}$$

avec les conditions aux limites sur l'interface air-métal

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = 0 \tag{3–2g}$$

$$[\underline{B}_0 . \underline{n}] = 0 \tag{3–2h}$$

$$[\underline{H}_0 \wedge \underline{n}] = 0 \tag{3–2i}$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}_0\, \underline{n}]_m^a = L_e^2 W C_{a,m}^0 \underline{n} \tag{3–2j}$$

et la condition à l'infini

$$\lim_{\|\underline{x}\| \to +\infty} \|\underline{B}(\underline{x})\| = 0. \tag{3–2k}$$

De (3–2g), on obtient que la frontière libre est stationnaire d'où

$$F_0(\underline{x}, t) = F_0(\underline{x}, 0) = \overline{F}(\underline{x})$$

et donc le domaine $\Omega_1^0(t) = \Omega_1(0)$. Notre système n'est plus un problème à frontière libre et nous sommes ramenés à l'étude du chapitre précédent en ce qui concerne le champ d'induction magnétique.

Dans Ω_1^0 connu, le champ d'induction magnétique, $\underline{B}_0^{int}$, et la vitesse du métal sont stationnaires d'où

$$\left.\begin{array}{lllll} \underline{B}_0^{int}(\underline{x}, t) & = & \underline{B}_0^{int}(\underline{x}, 0) & = & \underline{\varphi}_b^{int} \\ \underline{u}_0(\underline{x}, t) & = & \underline{u}_0(\underline{x}, 0) & = & \underline{\varphi}_u \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega_1^0.$$

Le champ $\underline{B}_0^{ext}$ est solution du problème extérieur

$$(P_{ext}) \begin{cases} \left.\begin{array}{l} div\, \underline{B}_0^{ext} = 0 \\ rot\, \underline{H}_0^{ext} = \underline{J}(\underline{x}, t) \\ \underline{B}_0^{ext} = \chi \underline{H}_0^{ext} \end{array}\right\} & \text{dans } \Omega^0 \\ \underline{B}_0^{ext} . \underline{n} = \underline{B}_0^{int} . \underline{n} = \underline{\varphi}_b^{int} . \underline{n} & \text{sur } \partial\Omega_1^0 \\ \underline{B}_0^{ext} \wedge \underline{n} = \dfrac{\underline{B}_0^{int}}{\chi_1} \wedge \underline{n} = \dfrac{\underline{\varphi}_b^{int}}{\chi_1} . \underline{n} & \text{sur } \partial\Omega_1^0 \\ \lim\limits_{\|\underline{x}\| \to +\infty} \|\underline{B}_0^{ext}\| = 0, & \end{cases}$$

où $\Omega^0 = \mathbb{R}^d \backslash \Omega_1^0$. De plus ici on doit vérifier la relation de compatibilité sur les contraintes

$$[\underline{\underline{\sigma}}_0\, \underline{n}]_m^a = W L_e^2 C_{a,m}^0 \underline{n},$$

et donc

$$\underline{\underline{\sigma}}_0^{ext} \underline{n} - \underline{\underline{\sigma}}_0^{int} \underline{n} = W L_e^2 C_{a,m}^0 \underline{n},$$

où $C_{a,m}^0$ est la courbure de la frontière du domaine initial.

Les composantes normale et tangentielle de B_0^{ext} sont données sur l'interface air-métal, $\partial\Omega_1^0$, en fait on a une condition de Dirichlet. Comme dans le cas précédent (frontière fixe) le problème (P_{ext}) n'admet pas de solution de manière générale. En outre il est peu probable de vérifier la relation sur les contraintes. Ce résultat implique que nous avons un problème de perturbation singulière et donc qu'il existe une couche limite dans Ω_1^0 au voisinage de $\partial\Omega_1^0$.

3.1.2 Méthode des développements raccordés

Pour trouver un développement uniforme de $\underline{B}_\epsilon$, on va utiliser la technique des développements raccordés, pour cela nous allons chercher $p_\epsilon, \underline{u}_\epsilon$ et $\underline{B}_\epsilon$ sous la forme :

$$B_\epsilon(\underline{x}, t) = \begin{pmatrix} \underline{B}_0^{ext}(\underline{x}, t) \\ \underline{B}_0^{int}(\underline{x}, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{B}^{cl}(\tau_1, \tau_2, \frac{r}{\epsilon}, t) \end{pmatrix} + \epsilon \underline{B}_1,$$

$$\underline{u}_\epsilon(\underline{x}, t) = \underline{u}_0(\underline{x}, t) + \underline{u}^{cl}(\tau_1, \tau_2, \frac{r}{\epsilon}, t) + \epsilon \underline{u}_1,$$

$$p_\epsilon(\underline{x}, t) = p_0(\underline{x}, t) + \epsilon p_1,$$

où τ_1, τ_2 représentent une paramétrisation normale de l'interface $\partial\Omega_1^0$.

L'introduction des termes de couche limite $\underline{B}^{cl}, \underline{u}^{cl}$, va nous permettre de construire une approximation uniforme de $\underline{B}_\epsilon$, $\underline{u}_\epsilon$, p_ϵ, dans Ω_1^0. De la même façon que précédemment, le tenseur des contraintes se décompose de la manière suivante

$$\underline{\underline{\sigma}}_\epsilon = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{\sigma}}^{cl} + \epsilon\, \underline{\underline{\sigma}}_1$$

avec

$$\underline{\underline{\sigma}}_0 = -\frac{P_0}{P_m} p_0 \underline{\underline{\mathbb{I}}} + \frac{2Re_m}{\chi H_a^2} \underline{\underline{E}}(\underline{u}_0) + \chi^{-1} \underline{B}_0 \otimes \underline{B}_0 - \frac{1}{2\chi} \underline{B}_0^2 \underline{\underline{\mathbb{I}}}$$

et

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^{cl} = \quad & \frac{2Re_m}{\chi H_a^2} \underline{\underline{E}}(\underline{u}^{cl}) + \chi^{-1} \underline{B}^{cl} \otimes \underline{B}^{cl} - \frac{1}{2\chi} \underline{B}^{cl} . \underline{B}^{cl} \underline{\underline{\mathbb{I}}} \\ & + \chi^{-1} (\underline{B}_0^{int} \otimes \underline{B}^{cl} + \underline{B}^{cl} \otimes \underline{B}_0^{int} - \underline{B}_0^{int} . \underline{B}^{cl} \underline{\underline{\mathbb{I}}}). \end{aligned}$$

Remarque Le tenseur des contraintes dans la couche limite se décompose en deux parties. Une avec uniquement des termes de couche limite et l'autre couple, les termes de la couche limite, avec ceux de l'extérieur.

Construction hors de la couche limite. Les termes réguliers $\underline{B}_0 = (\underline{B}_0^{ext}, \underline{B}_0^{int})$, $\underline{u}_0$, des développements de $\underline{B}_\epsilon$, $\underline{u}_\epsilon$, vérifient les équations du système, (P_{ext}), hors de la couche limite.

Proposition 5 *En première approximation, ordre 0, nous obtenons :*

1. *la frontière du métal est fixe, et il n'y a pas d'interaction entre le fluide et le champ magnétique,*
2. *le champ magnétique et les vitesses dans le métal sont donnés par les conditions initiales $(\underline{\varphi}_b^{int}, \underline{\varphi}_u)$ et la pression va s'ajuster pour vérifier la relation sur les contraintes.*
3. *le champ magnétique à l'extérieur du métal est solution de*

$$\left\{ \begin{array}{l} div\, \underline{B}_0^{ext} = 0 \\ \underline{B}_0^{ext} = \chi \underline{H}_0^{ext} \\ rot \underline{H}_0^{ext} = \underline{J}(\underline{x}, t) \\ \lim\limits_{\|\underline{x}\| \to +\infty} \|\underline{B}_0^{ext}\| = 0 \\ \underline{B}_0^{ext} . \underline{n} = \underline{\varphi}_b^{int} . \underline{n}. \end{array} \right.$$

On étend la validité des équations su sytème (P_{ext}) dans tout le métal et donc $\underline{B}_0, \underline{u}_0$, sont solutions de

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = 0 \tag{3–3a}$$

$$div\, \underline{B}_0 = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \tag{3–3b}$$

$$\underline{B}_0 = \chi \underline{H}_0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \tag{3–3c}$$

$$rot\, \underline{H}_0^{ext} = \underline{J}(\underline{x}, t) \quad \text{dans } \Omega^0 \tag{3–3d}$$

$$\frac{\partial \underline{B}_0^{int}}{\partial t} = 0 \qquad \text{dans } \Omega_1^0 \tag{3–3e}$$

$$\frac{\partial \underline{u}_0}{\partial t} = 0 \qquad \text{dans } \Omega_1^0 \tag{3–3f}$$

$$div\, \underline{u}_0 = 0 \qquad \text{dans } \Omega_1^0 \tag{3–3g}$$

$$\lim_{\|\underline{x}\| \to +\infty} \|\underline{B}_0^{ext}(x,t)\| = 0. \tag{3–3h}$$

Puisque $div\, \underline{B}_0 = 0$ dans $\mathbb{R}^d$, on doit nécessairement avoir

$$[\underline{B}_0.\underline{n}]_{\partial \Omega_1^0} = 0. \tag{3–3i}$$

D'après (3–3a) la frontière libre est stationnaire et donc

$$F_0(\underline{x}, t) = \overline{F}(\underline{x}).$$

L'étude précédente, domaine fixe, montre qu'il existe une unique solution $\underline{B}_0 = (\underline{B}_0^{ext}, B_0^{int})$ vérifiant (3–3b)-(3–3e) et (3–3h)-(3–3i). En effet (3–3e) donne

$$\underline{B}_0^{int}(\underline{x}, t) = \underline{\varphi}_b^{int}(\underline{x}).$$

et on déduit alors que $\underline{B}_0^{ext}$ est la solution du problème extérieur

$$\begin{cases} div\, \underline{B}_0^{ext} = 0 \\ \underline{B}_0^{ext} = \chi \underline{H}_0^{ext} \\ rot \underline{H}_0^{ext} = \underline{J}(\underline{x}, t) \\ \lim\limits_{\|\underline{x}\| \to +\infty} \|\underline{B}_0^{ext}\| = 0 \\ \underline{B}_0^{ext}.\underline{n} = \underline{\varphi}_b^{int}.\underline{n}. \end{cases}$$

De (3–3f) on obtient

$$\underline{u}_0(\underline{x}, t) = \underline{\varphi}_u(\underline{x}) \qquad \text{donnée.}$$

Par rapport au chapitre précédent, on a une relation supplémentaire sur les contraintes à vérifier. On a une solution uniquement si la relation suivante est vérifiée

$$[\underline{\underline{\sigma}}_0\, \underline{n}]_m^a = W L_e^2 C_{a,m}^0(\underline{x}) \underline{n},$$

c'est à dire

$$\underline{\underline{\sigma}}_0^{ext}\, \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}_0^{int}\, \underline{n} + L_e^2 W C_{a,m}^0(\underline{x}) \underline{n}. \tag{3–4}$$

Pour vérifier la composante normale de cette relation, il suffit d'ajuster la pression p_0 sur l'interface par

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{P_m} p_0 = & \left(\frac{2 Re_m}{\chi_1 H_a^2} \underline{\underline{E}}(\underline{u}_0) \underline{n} + \chi^{-1} \underline{B}_0^{int} \otimes \underline{B}_0^{int} \underline{n} - \underline{\underline{\sigma}}_0^{ext} \underline{n} \right) . \underline{n} \\ & - \frac{1}{2\chi} \underline{B}_0^{int} . \underline{B}_0^{int} + L_e^2 W C_{a,m}^0(\underline{x}) \end{aligned}$$

Pour calculer p_0 dans Ω_1^0 revenons à l'équation complète du mouvement et prenons la divergence de celle-ci. En posant $\hat{p}_\epsilon = \frac{P_0}{P_m} p_\epsilon + L_e^2 z$ on obtient

$$\Delta \hat{p}_\epsilon = div\, \nabla (\frac{P_0}{P_m} p_\epsilon + L_e^2 z) = div\, \underline{f}_L^\epsilon - \frac{1}{E_m} div\, ((\underline{u}_\epsilon . \nabla) \underline{u}_\epsilon).$$

A l'ordre 0 nous avons

$$\Delta \hat{p}_0 = \chi_1^{-1} div(rot\, \underline{B}_0^{int} \wedge \underline{B}_0^{int}) - \frac{1}{E_m} div\left((\underline{u}_0.\nabla)\underline{u}_0\right)$$

et donc

$$\frac{P_0}{P_m} p_0 = \hat{p}_0 - L_e^2 z.$$

Comme $\underline{B}_0^{int}$ et $\underline{B}_0^{int}$ sont complètement déterminés par les données intiales, $\hat{p}_0$ est solution de

$$\Delta \hat{p}_0 = \chi_1^{-1} div(rot\, \underline{\varphi}_b^{int} \wedge \underline{\varphi}_b^{int}) - \frac{1}{E_m} div\left((\underline{\varphi}_u.\nabla)\underline{\varphi}_u\right) = \Delta \varphi_p$$

avec sur l'interface

$$\begin{aligned}\hat{p}_0 = \quad & \left(\frac{2Re_m}{\chi_1 H_a^2} \underline{\underline{E}}(\underline{u}_0)\underline{n} + \chi^{-1} \underline{B}_0^{int} \otimes \underline{B}_0^{int} \underline{n} - \underline{\underline{\sigma}}_0^{ext} \underline{n}\right).\underline{n} \\ & -\frac{1}{2\chi} \underline{B}_0^{int}.\underline{B}_0^{int} + L_e^2 W C_{a,m}^0(\underline{x}) + L_e^2 z.\end{aligned}$$

Si $(\underline{\varphi}_b, \underline{\varphi}_u, \varphi_p)$ vérifie les équations de Navier-Stokes et de Maxwwell alors par unicité du problème de dirichlet ci-dessus on obtient : $\hat{p}_0 = \frac{P_0}{P_m}\varphi_p + L_e^2 z$.

Calcul des fonctions provenant de la couche limite. Nous nous plaçons dans une approche bidimensionnelle (cf Annexe A–1.3) et nous supposons que $\partial\Omega_1^0$ admet une paramétrisation normale.

Soit $M \in \Omega_1$ près de $\partial\Omega_1$, il s'écrit, en coordonnées locales, sous la forme $M(s,r) = P(s) - r\underline{n}(s)$ où $P(s)$, est la projection orthogonale de M sur $\partial\Omega_1$, voir l'annexe A–1.3 pour plus de détail.

Proposition 6 *l'approximation d'ordre 0 du champ magnétique, $\underline{B}^{cl} = (B_s^0, B_n^0)$, et de la vitesse, $\underline{u}^{cl} = (u_s^0, u_n^0)$ dans la couche limite est solution de*

$$\left\{\begin{array}{l} B_n^0 = 0, \\ \dfrac{\partial B_s^0}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 B_s^0}{\partial r^2} = 0 \\ B_s^0(s,0,t) = \underline{\tau}.(\chi_1 \underline{B}_0^{ext} - \underline{B}_0^{int}), \\ \lim\limits_{r\to+\infty} B_s^0 = 0, \\ B(s,r,0) \ donn\acute{e}e. \end{array}\right. \tag{3–5}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u_n^0 = 0, \\ \dfrac{\partial u_s^0}{\partial t} - \dfrac{E_m}{\chi_1}(\dfrac{Re_m}{H_a})^2 \dfrac{\partial^2 u_s^0}{\partial r^2} = 0, \\ \dfrac{\partial u_s^0}{\partial r} = -\dfrac{\partial}{\partial r}(\underline{u}_0.\underline{\tau}), \\ \lim\limits_{r\to+\infty} u_s^0 = 0, \\ u_s^0(s,r,0) = donn\acute{e}e. \end{array}\right. \tag{3–6}$$

où $\underline{u}_0, \underline{B}_0^{ext}, \underline{B}_0^{int}$ sont données par la proposition 5.

Le champ magnétique B_ϵ (resp. les vitesses $\underline{u}_\epsilon$) est décomposé en une composante normale, B_n, (resp. u_n) à $\partial\Omega_1$, et une composante tangentielle, B_s, (resp. u_s). Le système (P_ϵ) s'écrit en coordonnées locales

$$\frac{\partial B_s}{\partial s} - \frac{\partial h_1 B_n}{\partial r} = 0 \tag{3–7a}$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{\partial h_1 u_n}{\partial r} = 0 \tag{3–7b}$$

$$\frac{\partial B_s}{\partial t} - \epsilon^2 \left\{ \frac{\partial^2 B_s}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{h_1}\frac{\partial B_n}{\partial s}) + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{B_s}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial r}) \right\} = \epsilon^2 Re_m \frac{\partial}{\partial r}(u_s B_n - u_n B_s) \tag{3–7c}$$

$$\frac{\partial B_n}{\partial t} - \frac{\epsilon^2}{h_1}\left\{\frac{\partial^2 B_s}{\partial r \partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{h_1}(\frac{\partial B_n}{\partial s}) + \frac{\partial}{\partial s}(\frac{B_s}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial r})\right\} = \epsilon^2 Re_m \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial s}(u_s B_n - u_n B_s) \qquad \text{(3–7d)}$$

$$\frac{1}{E_m}(\frac{1}{\epsilon^2 Re_m}\frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{u_s}{h_1}\frac{\partial u_s}{\partial r} - u_n\frac{\partial u_n}{\partial r}) + \frac{1}{h_1}\frac{P_0}{P_m}\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{Rem}{\chi_1 H_a^2}\Delta_s \underline{u}^{cl} = (-L_e^2 \underline{e}_z + \underline{f}_L).\underline{\tau} \qquad \text{(3–7e)}$$

$$\frac{1}{E_m}(\frac{1}{\epsilon^2 Re_m}\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u_s}{h_1}\frac{\partial u_n}{\partial r} - u_n\frac{\partial u_n}{\partial r}) - \frac{P_0}{P_m}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{Rem}{\chi_1 H_a^2}\Delta_n \underline{u}^{cl} = (-L_e^2 \underline{e}_z + \underline{f}_L).\underline{n} \qquad \text{(3–7f)}$$

où la force de Lorentz a pour expression

$$f_L = -\frac{B_n}{h_1}(\frac{\partial}{\partial r}(h_1 B_s) + \frac{\partial B_n}{\partial s})\underline{\tau} + \frac{B_s}{h_1}(\frac{\partial}{\partial r}(h_1 B_s) + \frac{\partial B_n}{\partial s})\underline{n}$$

et $\Delta_s \underline{u}^{cl}$ resp. $\Delta_s \underline{u}^{cl}$ représente la composante tangentielle resp. normale du laplacien de la vitesse couche limite.

On souhaite un approximation uniforme de $\underline{B}_\epsilon, \underline{u}_\epsilon, p_\epsilon$, pour cela il faut statisfaire les conditions aux limites.

Posons $\underline{B}_\epsilon = \underline{B}_0 + \underline{B}_0^{cl} + o(1)$ et $\underline{u}_\epsilon = \underline{u}_0 + \underline{u}_0^{cl} + o(1)$ avec $\underline{B}_0^{cl} = (B_s^0, B_n^0)$ et $\underline{u}_0^{cl} = (u_s^0, u_n^0)$.

Comme on doit avoir $[\underline{B}_\epsilon.\underline{n}]_m^a = 0$ et $[\underline{H}_\epsilon \wedge \underline{n}]_m^a = 0$, par construction de $\underline{B}_0$ et $\underline{H}_0$ nous avons à l'ordre 0

$$\left\{\begin{array}{ll} B_n^0 & = 0 \\ B_s^0 & = \underline{\tau}.(\chi_1 \underline{B}_0^{ext} - \underline{B}_0^{int}). \end{array}\right. \qquad \text{(3–8)}$$

De même on doit avoir $[\underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n}]_m^a = W L_e^2 C_{a,m} \underline{n}$, or on a déjà (3–4) et donc nécessairement il faut

$$\underline{\underline{\sigma}}^{cl}\, \underline{n}\, \underline{n} = 0 \quad et \quad \underline{\underline{\sigma}}^{cl}\, \underline{n}\, \underline{\tau} = -\underline{\underline{\sigma}}_0\, \underline{n}\, \underline{\tau}.$$

Pour étudier la couche limite, on dilate la direction normale par

$$\left\{\begin{array}{lcl} s & := & s \\ r & := & r/\epsilon. \end{array}\right.$$

Les équations (3–7a) et (3–7b) s'écrivent

$$\frac{\partial u_n}{\partial r} + \epsilon\left(\rho(s)u_n - \frac{\partial u_s}{\partial s} + \rho(s) r \frac{\partial u_n}{\partial r}\right) = 0$$

$$\frac{\partial B_n}{\partial r} + \epsilon\left(\rho(s)B_n - \frac{\partial B_s}{\partial s} + \rho(s) r \frac{\partial B_n}{\partial r}\right) = 0.$$

A l'ordre 0, nous obtenons

$$\frac{\partial B_n^0}{\partial r} = \frac{\partial u_n^0}{\partial r} = 0.$$

Les composantes normales ne indépendent pas de la direction normale. D'après la condition (3–8) nous avons directement

$$B_n^0 = 0.$$

Pour le champ magnétique on a :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial B_s}{\partial t} - \frac{\partial^2 B_s}{\partial r^2} - \epsilon\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{h_1}\frac{\partial B_n}{\partial s}) - \frac{\partial}{\partial r}(\frac{B_s}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial r}) = \epsilon Re_m \frac{\partial}{\partial r}(u_s B_n - u_n B_s) \\ h_1\frac{\partial B_n}{\partial t} - \epsilon\frac{\partial^2 B_s}{\partial r \partial s} - \epsilon^2\left\{\frac{\partial}{\partial s}(\frac{1}{h_1}\frac{\partial B_n}{\partial s}) + \epsilon\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\rho(s)}{h_1}B_s)\right\} = \epsilon^2 Re_m \frac{\partial}{\partial s}(u_s B_n - u_n B_s). \end{array}$$

A l'ordre 0, le champ d'induction magnétique est solution de

$$\frac{\partial B_s^0}{\partial t} - \frac{\partial^2 B_s^0}{\partial r^2} = 0$$

$$\frac{\partial B_n^0}{\partial t} = 0.$$

Remarque Cette dernière relation doit être vérifiée $\forall t > 0$. On a un problème pour $t = 0$, car la donnée initiale peut ne pas être nulle.

La composante tangentielle, B_s^0, est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_s^0}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 B_s^0}{\partial r^2} = 0 \\ B(s,r,0) \text{ donnée}, \\ B_s^0(s,0,t) = \underline{\tau}.(\chi_1 \underline{B}_0^{ext} - \underline{B}_0^{int}). \end{cases} \tag{3–9}$$

De plus, on a la condition de raccord suivante

$$\lim_{r\to+\infty} (B_n^0, B_s^0)(s,r,t) = 0.$$

Avec cette condition le champ magnétique dans la couche limite est complètement déterminé. Revenons aux équation du mouvement, dilatons dans la direction normale et considérons que les termes d'ordre 0. La vitesse $\underline{u}_0^{cl} = (u_s^0, u_n^0)$ est alors solution de

$$\begin{aligned} &E_m^{-1} \frac{\partial u_s^0}{\partial t} - \Lambda \frac{\partial^2 u_s^0}{\partial r^2} = 0 \\ &\frac{\partial u_n^0}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

où $\Lambda = \dfrac{1}{\chi_1}(\dfrac{Re_m}{H_a})^2$ et vérifie les conditions aux limites

$$\lim_{r\to+\infty} \underline{u}^{cl}(s,r,t) = 0.$$

avec la condition initiale

$$u_s^0(s,r,0) \text{ donnée}.$$

De plus l'approximation couche limite du tenseur des contraintes doit vérifier

$$\underline{\underline{\sigma}}^{cl}\, \underline{n}\, \underline{n} = 0 \quad et \quad \underline{\underline{\sigma}}^{cl}\, \underline{n}\, \underline{\tau} = -\underline{\underline{\sigma}}_0\, \underline{n}\, \underline{\tau}.$$

Comme $B_n^0 = 0$ sur la surface, ces relations s'expriment, avant dilatation, par les conditions suivantes

$$\Lambda(-h_1 \frac{\partial}{\partial r}(\frac{u_s}{h_1}) + \frac{1}{h_1}\frac{\partial u_n}{\partial s}) + \chi^{-1}\underline{B}_0^{int}.\underline{n} B_s = -\Lambda \underline{\underline{E}}(\underline{u}_0)\, \underline{n}\, \underline{\tau} + (B_0^{int})^2 [\frac{1}{\chi}]_m^a,$$

$$\Lambda \frac{\partial u_n}{\partial r} + \underline{B}_0^{int}.\underline{n} - \frac{1}{2\chi_1}(B_s)^2 + \chi^{-1}\underline{B}_0^{int}.\tau B_s = 0.$$

Supposons que $\frac{\Lambda\chi_1}{\epsilon} >> 1$ et $\frac{P_0}{P_m}\frac{\Lambda\chi_1}{\epsilon} >> 1$, on dilate la direction normale pour obtenir les deux conditions suivantes à l'ordre 0

$$\frac{\partial u_s^0}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}(\underline{u}_0.\underline{\tau}) \quad et \quad \frac{\partial u_n^0}{\partial r} = 0.$$

D'après l'équation de la divergence et la condition de raccord on $u_n^0 = 0$ et donc l'approximation de couche limite est solution de

$$\begin{cases} u_n^0 = 0, \\ E_m^{-1}\dfrac{\partial u_s^0}{\partial t} - \Lambda \dfrac{\partial^2 u_s^0}{\partial r^2} = 0, \\ \dfrac{\partial u_s^0}{\partial r} = -\dfrac{\partial}{\partial r}(\underline{u}_0.\underline{\tau}), \\ \lim\limits_{r\to+\infty} u_s^0 = 0, \\ u_s^0(s,r,0) = \text{donnée}. \end{cases} \tag{3–10}$$

3.2 Le modèle magnéto-hydrostatique en régime harmonique

Plaçons nous dans le cas particulier où l'état initial est l'état d'équilibre hydrostatique pour le mouvement. Cela se traduit par

$$\begin{array}{lll} \underline{\varphi}_u = 0 & dans & \Omega_1^0, \\ \varphi_p = \frac{P_0}{P_m} p_m + L_e^2 z & dans & \Omega_1^0, \end{array}$$

avec p_m constant et Ω_1^0 donné.

On se donne la densité de courant $\underline{J}$ sous la forme

$$\underline{J}(\underline{x}, t) = j(\underline{x}) e^{it} \underline{e}_y$$

avec $j(\underline{x})$ complexe. Nous supposons qu'il existe un champ d'induction magnétique sous la forme $\underline{B}_\epsilon(\underline{x}) e^{it}$ [5] orthogonal à $\underline{e}_y$, avec $\underline{B}_\epsilon(\underline{x})$ complexe.

On a alors d'après (3–3e)

$$\underline{B}_0^{int} \equiv 0$$

et donc

$$\underline{B}_0^{ext} . \underline{n} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega_1^0.$$

Alors $\underline{B}_0^{ext}$ est solution du problème extérieur suivant

$$(P_{ext}^0) \quad \left\{ \begin{array}{lll} div\, \underline{B}_0^{ext} = 0 & dans & \Omega^0 \\ \underline{B}_0^{ext} = \chi \underline{H}_0^{ext} & dans & \Omega^0 \\ rot\, \underline{H}_0^{ext} = j(\underline{x}) \underline{e}_y & dans & \Omega^0 \\ \lim\limits_{\|\underline{x}\| \to +\infty} \|\underline{B}_0^{ext}\| = 0 & & \\ \underline{B}_0^{ext} . \underline{n} = 0 & sur & \partial\Omega^0. \end{array} \right.$$

D'après (3–3f) la vitesse est stationnaire, on a donc

$$\underline{u}_0 \equiv 0.$$

Comme $\underline{B}_0^{int} = 0$ et $\underline{u}_0 = 0$, la relation de compatibilé sur les contraintes s'écrit

$$[\underline{\underline{\sigma}}_0\, \underline{n}]_m^a = \left(p_0 - \frac{P_0}{P_m} p_a - \frac{1}{2} |\underline{B}_0^{ext}|^2 \right) \underline{n} = W L_e^2 C_{a,m}^0 \underline{n}.$$

Finalement la condition d'existence de l'état d'équilibre et donc de la frontière libre est

$$L_e^2 W C_{a,m}^0 + \frac{1}{2} |\underline{B}_0^{ext}|^2 = p_0(\underline{x}, t) - \frac{P_0}{P_m} p_a$$

Le terme de gauche de l'inégalité ci-dessus ne dépend que des données initiales (état d'équilibre), on en déduit que

$$p_0(\underline{x}, t) = p_0(\underline{x}, 0) \qquad \forall t$$

qui n'est rien d'autre que φ_p, la donnée initiale sur la pression. L'état d'équilibre est donc donné par une frontière satisfaisant à

$$\frac{1}{2} |\underline{B}_0^{ext}|^2 + L_e^2 W C_{a,m}^0 + L_e^2 z = cste = \frac{P_0}{P_m} (p_m - p_a) = p_c$$

La partie régulière du développement est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{lll} div\, \underline{B}_0^{ext} = 0 & dans & \Omega^0 \\ rot\, \underline{H}_0^{ext} = j(\underline{x}) \underline{e}_y & dans & \Omega^0 \\ \underline{B}_0^{ext} = \chi \underline{H}_0 & dans & \Omega^0 \\ \lim\limits_{\|\underline{x}\| \to +\infty} \|\underline{B}_0^{ext}\| = 0 & & \\ \underline{B}_0^{ext} . \underline{n} = 0 & sur & \partial\Omega^0 \\ \frac{1}{2} |\underline{B}_0^{ext}|^2 + L_e^2 W C_{a,m}^0 + L_e^2 z = p_c & sur & \partial\Omega^0 \end{array} \right.$$

5. Si $\underline{J} = \underline{J}_0(\underline{x}) e^{it}$, on sait en absence de métal que le champ magnétique est de la même forme.

La constante p_c reste toujours à déterminer. Pour cela rappelons nous que nous avons supposé le métal liquide comme un fluide incompressible. Cette hypothèse a pour conséquence que le volume du métal reste constant avec le temps. Donc on résout le système ci-dessus sous la contrainte

$$Vol(\Omega_1^0) = V_0 = \text{ volume de métal donné.}$$

Construction dans la couche limite.

Comme la composante normale est stationnaire on a

$$B_n^0 \equiv 0,$$

et B_s^0 est solution de

$$\left\{\begin{array}{l} iB_s^0 - \dfrac{\partial^2 B_s^0}{\partial r^2} = 0 \\ B_s^0(s,0,t) = \chi_1 \underline{\tau}(s).\underline{B}_0^{ext}(P(s)) \\ \lim\limits_{r\to+\infty} B_s^0(s,r,t) = 0. \end{array}\right.$$

La vitesse couche limite vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_s^0}{\partial t} - \Lambda \dfrac{\partial^2 u_s^0}{\partial r^2} = 0 \\ u_n^0 = 0 \\ \dfrac{\partial u_s^0}{\partial r}(s,0,t) = 0 \\ \lim\limits_{r\to+\infty} \underline{u}^{cl}(s,r,t) = 0 \\ \underline{u}^{cl}(s,r,0) = \text{partie couche limite de } \underline{\varphi}_u. \end{array}\right.$$

La vitesse ne présente pas de couche limite à l'instant initiale nous obtenons

$$\underline{u}^{cl}(.,t) \equiv 0 \qquad \forall t.$$

Récapitulatif L'équilibre hydrostatique en régime harmonique est donnée par

Proposition 7 *L'approximation uniforme d'ordre 0 du modèle magnétostatique est donnée par*

$$\begin{array}{l} \underline{B}_0(\underline{x},t) = \begin{pmatrix} \underline{B}_0^{ext}(\underline{x})\, e^{it} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_1 B_0^{ext}(S) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{r}{\epsilon}}\ e^{i(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{r}{\epsilon})} \end{pmatrix} \underline{\tau}(s) \\ \underline{u}_0 = 0 \\ p_0 = \frac{P_0}{P_m} p_m + L_e^2 z \end{array}$$

où $\underline{B}_0^{ext}$ solution du problème à frontière libre

$$(P_0^{ext}) \quad \left\{\begin{array}{lll} div\, \underline{B}_0^{ext} = 0 & dans & \Omega \\ rot\, \underline{H}_0^{ext} = j(\underline{x})\underline{e}_y & dans & \Omega \\ \underline{B}_0^{ext}.\underline{n} = 0 & sur & \partial\Omega \\ \dfrac{1}{2}|\underline{B}_0^{ext}|^2 + L_e^2 W C_{a,m}^0 + L_e^2 z = p_c & sur & \partial\Omega \\ \lim\limits_{\|x\|\to+\infty} ||\underline{B}(\underline{x})|| = 0 & & \\ Vol(\Omega^c) = V_0 = \text{ volume de métal donné,} & & \end{array}\right.$$

et $B_0^{ext}(S) = \underline{B}_0^{ext}(P(s)).\underline{\tau}(s)$.

Conclusion

Cette étude montre qu'à l'échelle du temps magnétique qui est très petite en haute fréquence tout est figé dans les conducteurs solides ou liquides. En fait tout se concentre dans une zone de faible épaisseur près de la surface du conducteur. Les méthodes perturbations singulières, nous ont permis de construire, à l'ordre 0, des modèles où la peau magnétique est prise en compte comme un courant magnétique sur la surface du conducteur. Une faiblesse de ces modèles est qu'ils sont basés sur une échelle de temps très petite de l'ordre de 10^{-4} sec., or les phénomènes physiques que l'on voit, évolution de la forme, oscillation de la surface, sont à une échelle de temps de l'ordre de la seconde ou plus. Aussi une étude en introduisant un temps long est en cours pour pouvoir regarder à l'ordre 0 l'évolution du sytème cf [4] sur des grandes échelles de temps.

A Annexes

A–1 Equations en variables locales

A–1.1 Cas général

Considérons un système orthogonal de coordonnées curvilignes (s_1, s_2, s_3), et les vecteurs unitaires $\underline{\tau}_1, \underline{\tau}_2, \underline{\tau}_3$. Nous avons alors

$$d\underline{x} = h_1 ds_1 \underline{\tau}_1 + h_2 ds_2 \underline{\tau}_2 + h_3 ds_3 \underline{\tau}_3$$
$$dl^2 = h_1^2 ds_1 + h_2^2 ds_2^2 + h_3^2 ds^2.$$

Nous avons les six relations suivantes

$$\frac{\partial \underline{\tau}_i}{\partial s_j} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial s_i}\underline{\tau}_j \qquad avec\ i,j = 1, ..., 3\ et\ i \neq j.$$

Nous avons aussi les trois relation suivantes

$$\frac{\partial \underline{\tau}_1}{\partial s_1} = \frac{\partial(\underline{\tau}_2 \wedge \underline{\tau}_3)}{\partial s_1} = -\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial s_2}\underline{\tau}_2 - \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial s_3}\underline{\tau}_3$$

$$\frac{\partial \underline{\tau}_2}{\partial s_2} = \frac{\partial(\underline{\tau}_3 \wedge \underline{\tau}_1)}{\partial s_2} = -\frac{1}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial s_3}\underline{\tau}_3 - \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial s_1}\underline{\tau}_1$$

$$\frac{\partial \underline{\tau}_3}{\partial s_3} = \frac{\partial(\underline{\tau}_1 \wedge \underline{\tau}_2)}{\partial s_3} = -\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial s_1}\underline{\tau}_1 - \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial s_2}\underline{\tau}_2$$

Dans se sytème l'opérateur gradient s'écrit

$$\nabla := (\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial s_2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial s_3})$$

et donc le gradient d'une fonction scalaire ϕ est

$$\nabla\phi := \frac{1}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial s_1}\underline{\tau}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial s_2}\underline{\tau}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial s_3}\underline{\tau}_3$$

Soit $\underline{B}$ un champ de vecteur défini par $\underline{B} = (B_{\tau_1}, B_{\tau_2}, B_{\tau_3})$ alors l'opérateur divergence s'écrit

$$div\,\underline{B} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}[\frac{\partial}{\partial s_1}(h_2 h_3 B_{\tau_1}) + \frac{\partial}{\partial s_2}(h_1 h_3 B_{\tau_2}) + \frac{\partial}{\partial s_3}(h_1 h_2 B_{\tau_3})]$$

et l'opérateur rotationnel

$$rot\,\underline{B} = \zeta_1 \underline{\tau}_1 + \zeta_2 \underline{\tau}_2 + \zeta_3 \underline{\tau}_3$$

avec

$$\zeta_1 = \frac{1}{h_2 h_3}[\frac{\partial}{\partial s_2}(h_3 B_{\tau_3}) - \frac{\partial}{\partial s_3}(h_2 B_{\tau_2})]$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{h_1 h_3}[\frac{\partial}{\partial s_3}(h_1 B_{\tau_1}) - \frac{\partial}{\partial s_1}(h_3 B_{\tau_3})]$$

$$\zeta_3 = \frac{1}{h_1 h_2}[\frac{\partial}{\partial s_1}(h_2 B_{\tau_2}) - \frac{\partial}{\partial s_2}(h_1 B_{\tau_1})].$$

Soit ϕ une fonction scalaire alors son laplacien est donné par

$$\Delta\phi = div(\nabla\phi)$$

et donc

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}[\frac{\partial}{\partial \tau_1}\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial s_2} + \frac{\partial}{\partial s_3}\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial s_3}].$$

Pour calculer le laplacien d'un vecteur, il est préférable d'utiliser la relation

$$\Delta\underline{B} = \nabla(div\underline{B}) - rot\, rot\underline{B}$$

et les expressions ci-dessus du gradient, de la divergence et du rotationnel. Dans le cas d'un champ de vecteur à divergence nulle on a

$$\Delta\underline{B} = \alpha_1\underline{\tau}_1 + \alpha_2\underline{\tau}_2 + \alpha_3\underline{\tau}_3$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{1}{h_2h_3}[\frac{\partial}{\partial s_2}(h_3\zeta_3) - \frac{\partial}{\partial s_3}(h_2\zeta_2)]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{h_1h_3}[\frac{\partial}{\partial s_3}(h_1\zeta_1) - \frac{\partial}{\partial s_1}(h_3\zeta_3)]$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{h_1h_2}[\frac{\partial}{\partial s_1}(h_2\zeta_2) - \frac{\partial}{\partial s_2}(h_1\zeta_1)]$$

Nous devons aussi savoir écrire le tenseur des contraintes dans ce système. Pour cela nous avons besoin de connaitre l'expression du tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{E}}$ défini par (voir [2])

$$2e_{i,j} = \underline{\tau}_i.(\underline{\tau}_j.\nabla)\underline{u} + \underline{\tau}_j.(\underline{\tau}_i.\nabla)\underline{u}$$

où $\underline{u}$ est le vecteur vitesse. Il a pour expression

$$e_{i,i} = \underline{\tau}_i.(\underline{\tau}_i.\nabla)\underline{u} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial u_{\tau_i}}{\partial s_i} + \sum_{k\neq i}\frac{u_{\tau_k}}{h_ih_k}\frac{\partial h_i}{\partial s_k}$$

si $i \neq j$

$$e_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{h_i}{h_j}\frac{\partial}{\partial s_j}\frac{u_{\tau_i}}{h_i} + \frac{1}{2}\frac{h_j}{h_i}\frac{\partial}{\partial s_i}\frac{u_{\tau_j}}{h_j}$$

A–1.2 Opérateur près d'une surface

Soit M un point près de la surface, on note par P sa projection orthogonale sur cette surface, alors il a pour expression

$$M = P(s_1, s_2) - n\underline{n}(s_1, s_2)$$

où (s_1, s_2, n) est le système de coordonnées curvilignes. L'élément de longueur est

$$dl^2 = h_1^2 d\tau_1 + h_2^2 d\tau_2^2 + h_3^2 dn^2$$

avec

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 + \rho_1(s_1, s_2)n, \\ h_2 &= 1 + \rho_2(s_1, s_2)n, \\ h_3 &= -1, \end{aligned}$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les courbures principales.

Soit $B = (B_{\tau_1}, B_{\tau_2}, B_n)$ un champ de vecteur, alors on a

$$div\,\underline{B} = \frac{1}{h_1h_2}[\frac{\partial}{\partial s_1}(h_2B_{\tau_1}) + \frac{\partial}{\partial s_2}(h_1B_{\tau_2}) - \frac{\partial}{\partial n}(h_1h_2B_n)]$$

$$rot\,\underline{B} = \zeta_1\underline{\tau}_1 + \zeta_2\underline{\tau}_2 + \zeta_3\underline{n}$$

avec

$$\zeta_1 = \frac{1}{h_2}[\frac{\partial B_n}{\partial s_2} + \frac{\partial}{\partial n}(h_2B_{\tau_2})]$$

$$\zeta_2 = \frac{-1}{h_1}[\frac{\partial}{\partial n}(h_1B_{\tau_1}) + \frac{\partial B_n}{\partial s_1}]$$

$$\zeta_3 = \frac{1}{h_1h_2}[\frac{\partial}{\partial s_1}(h_2B_{\tau_2}) - \frac{\partial}{\partial s_2}(h_1B_{\tau_1})].$$

Soit ϕ une fonction scalaire alors son laplacien est donné par

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1 h_2}[\frac{\partial}{\partial\tau_1}\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial s_2} + \frac{\partial}{\partial n}h_1 h_2\frac{\partial\phi}{\partial n}]$$

Dans le cas d'un champ de vecteur à divergence nulle on

$$\Delta\underline{B} = \alpha_1\underline{\tau}_1 + \alpha_2\underline{\tau}_2 + \alpha_3\underline{n}$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{1}{h_2}[\frac{\partial\zeta_3}{\partial s_2} + \frac{\partial}{\partial n}(h_2\zeta_2)]$$

$$\alpha_2 = \frac{-1}{h_1}[\frac{\partial}{\partial n}(h_1\zeta_1) + \frac{\partial\zeta_3}{\partial s_1}]$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{h_1 h_2}[\frac{\partial}{\partial s_1}(h_2\zeta_2) - \frac{\partial}{\partial s_2}(h_1\zeta_1)]$$

Le tenseur des taux de déformation a pour expression

$$\begin{aligned}
e_{1,1} &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial u_{\tau_1}}{\partial s_1} + \frac{u_{\tau_2}}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial s_2} - \frac{u_{\tau_3}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial n}\\
e_{2,2} &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial u_{\tau_2}}{\partial s_2} + \frac{u_{\tau_2}}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial s_2} - \frac{u_{\tau_3}}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial n}\\
e_{3,3} &= -\frac{\partial u_{\tau_3}}{\partial n}\\
e_{1,2} &= \frac{h_1}{2h_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(\frac{u_{\tau_2}}{h_2}) + \frac{h_2}{2h_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(\frac{u_{\tau_1}}{h_1})\\
e_{1,3} &= -\frac{h_1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial s_1} - \frac{1}{2h_1}\frac{\partial}{\partial n}(\frac{u_{\tau_1}}{h_1})\\
e_{2,3} &= -\frac{h_2}{2}\frac{\partial u_n}{\partial s_2} - \frac{1}{2h_2}\frac{\partial}{\partial n}(\frac{u_{\tau_2}}{h_2})
\end{aligned}$$

A–1.3 Opérateur près d'une surface cylindrique, approche bidimensionelle

Supposons maintenant que la surface soit cylindrique d'axe $\underline{e}_y$ alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
h_1 &= 1 + \rho(s)n,\\
h_2 &= 1,\\
h_3 &= -1,
\end{aligned}$$

où ρ est la courbure.

On a $\frac{d}{ds}\underline{n}(s) = -\rho(s)\underline{\tau}(s)$.

Nous nous plaçons aussi dans une approche bidimensionnelle, c'est à dire que nous ne nous intéressons qu'à une coupe d'un domaine tri-dimensionnel. Les hypothèses naturelles sont les suivantes

- les variables sont indépendantes de y,
- $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$,
- les vecteurs sont de la forme $\underline{B} = (B_s, 0, B_n)$.

Dans un tel système les opérateurs standarts s'écrivent

$$\nabla := (\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial s}, 0, -\frac{\partial}{\partial n})$$

$$div\,\underline{B} = \frac{1}{h_1}[\frac{\partial B_s}{\partial s} - \frac{\partial h_1 B_n}{\partial n}]$$

et l'opérateur rotationnel

$$rot\,\underline{B} = \zeta\underline{e}_y$$

avec

$$\zeta = \frac{-1}{h_1}[\frac{\partial}{\partial n}(h_1 B_s) + \frac{\partial B_n}{\partial s}]$$

Soit $\underline{A}$ un champ de vecteur de la forme $\underline{A} = A_y \underline{e}_y$ alors

$$rot\underline{A} = \frac{\partial A_y}{\partial n}\underline{\tau} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial A_y}{\partial s}\underline{n}$$

Soit ϕ une fonction scalaire alors son laplacien est donnée par

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1}[\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n}h_1\frac{\partial\phi}{\partial n}]$$

Dans le cas d'un champ de vecteur à divergence nulle on a

$$\Delta\underline{B} = \alpha_1\underline{\tau} + \alpha_2\underline{e}_y + \alpha_3\underline{n}$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{\partial\zeta}{\partial n} \qquad = -\frac{\partial^2 B_s}{\partial n^2} - \frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{h_1}\frac{\partial B_n}{\partial s}) - \frac{\partial}{\partial n}(\frac{B_s}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial n})$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\zeta}{\partial s} \quad = -\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2 B_s}{\partial n\partial s} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial s}(\frac{1}{h_1}\frac{\partial B_n}{\partial s}) - \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial s}(\frac{B_s}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial n})$$

Le tenseur des taux de déformation a pour expression

$$\begin{aligned}
e_{s,s} &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{u_n}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial n} \\
e_{n,n} &= -\frac{\partial u_n}{\partial n} \\
e_{s,n} &= -\frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial n}(\frac{u_s}{h_1}) + \frac{1}{2h_1}\frac{\partial u_n}{\partial s} \\
e_{y,y} &= e_{y,s} = e_{y,n} = 0.
\end{aligned}$$

La force de Lorentz, défini par $f_L = rot\underline{B} \wedge \underline{B}$, a pour expression dans ce repère

$$f_L = -\frac{B_n}{h_1}(\frac{\partial}{\partial n}(h_1 B_s) + \frac{\partial B_n}{\partial s})\underline{\tau} + \frac{B_s}{h_1}(\frac{\partial}{\partial n}(h_1 B_s) + \frac{\partial B_n}{\partial s})\underline{n}$$

et le terme de couplage dans l'équation du champ d'induction

$$rot(\underline{u} \wedge \underline{B}) = \frac{\partial}{\partial n}(u_n B_s - u_s B_n)\underline{\tau} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial s}(u_n B_s - u_s B_n)\underline{n}.$$

A–2 Tenseur des contraintes sur l'interface air-métal

Le tenseur des contraintes a pour expression dans l'air

$$\underline{\underline{\sigma}}^{air} = -(p_a + \frac{1}{2}\underline{B}^a.\underline{B}^a)\underline{\underline{\mathbb{I}}} + \underline{B}^a \otimes \underline{B}^a,$$

et dans le métal

$$\underline{\underline{\sigma}}^{métal} = -(p + \frac{1}{2\chi_1}\underline{B}^m.\underline{B}^m)\underline{\underline{\mathbb{I}}} + \chi_1^{-1}\underline{B}^m \otimes \underline{B}^m + 2\eta\underline{\underline{E}}$$

avec

$$\underline{B} \otimes \underline{B} = (B_i B_j)_{i,j} \quad et \quad \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\nabla\underline{u} + {}^t\nabla\underline{u})$$

Le saut des contraintes à l'interface est donné par

$$[\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}]^{air}_{métal} = \underline{\underline{\sigma}}^{air}\underline{n} - \underline{\underline{\sigma}}^{métal}\underline{n}$$

Pour évaluer cette quantité on doit regarder le tenseur $\underline{B} \otimes \underline{B}$

$$(\underline{B} \otimes \underline{B})\underline{n} = (\sum_{j=1}^{d} B_i B_j n_j)_i = (\underline{B}.\underline{n})\underline{B}$$

$$[\chi^{-1}(\underline{B} \otimes \underline{B})\underline{n}]^m_a = [\chi^{-1}(\underline{B}.\underline{n})\underline{B}]^m_a = [(\underline{B}.\underline{n})\underline{H}]^a_m.$$

Comme $div\underline{B} = 0$, on a $[\underline{B}.\underline{n}]^a_m = 0$ et on déduit que

$$[\chi^{-1}\underline{B} \otimes \underline{B}\,\underline{n}]^a_m = \underline{B}.\underline{n}[\underline{H}]^a_m.$$

On a aussi $[\underline{H} \wedge \underline{n}]^a_m = 0$ alors

$$[\chi^{-1}\underline{B} \otimes \underline{B}\,\underline{n}]^a_m = \underline{B}.\underline{n}[\underline{H}.\underline{n}]^a_m\underline{n}.$$

Finalement, nous avons l'expression

$$[\chi^{-1}\underline{B} \otimes \underline{B}\,\underline{n}]^a_m = (\underline{B}.\underline{n})^2[\frac{1}{\chi}]^a_m\underline{n}.$$

Le saut du tenseur des contraintes à travers l'interface métal air a pour expression

$$[\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}]^a_m = \left(p - p_a + \frac{1}{2}(\chi_1^{-1}\underline{B}^m.\underline{B}^m - \underline{B}^a.\underline{B}^a) - (\underline{B}.\underline{n})^2[\frac{1}{\chi}]^a_m\right)\underline{n} - 2\eta\underline{\underline{E}}\,\underline{n}$$

Remarque Seule la composante tangentielle de $\underline{\underline{E}}\,\underline{n}$ intervient dans celle du vecteur contrainte.

Dans le cas où la fonction χ est continue à l'interface entre l'air et le métal ($\chi_1 \equiv 1$) et en introduisant les nouvelles pressions

$$\begin{aligned} P_M &= p + \frac{1}{2\chi_1}\underline{B}^m.\underline{B}^m \\ P_A &= p_a + \frac{1}{2}\underline{B}^a.\underline{B}^a \end{aligned}$$

on a

$$[\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}]^a_m = (P_M - P_A)\underline{n} + 2\eta\underline{\underline{E}}\,\underline{n}.$$

Si la perméabilité du métal μ_1 est la même que celle de l'air nous avons la continuité de χ a l'interface. Cette continuité implique celle du champ d'induction magnétique.

Références

[1] Les applications innovantes de l'induction dans l'industrie. Les guides de l'innovation, documentation EDF CFE, 1992.

[2] G.K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics.* Cambridge University Press, 1992.

[3] J. P. Brancher, J. Etay, and O. Sero-Guillaume. Formage d'une lame. *J.M.T.A.*, 2(6):976–989, 1983.

[4] O. Coulaud. Electromagnetic-hydrodynamic coupling in the treatment of liquid metals. In *8th Conference of the Eurepean Consortium for Mathematics in Idustry*, page 257, September 1994.

[5] O. Coulaud and A. Henrot. Numerical approximation of a free boundary problem arising in electromagnetic shape. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(4):1109–1127, 1994.

[6] Deframond. *Quelques aspects du formage électromagnétique des surfaces libres. Application et hydrodynamique.* PhD thesis, INPG, 1985.

[7] Wiktor Eckhaus. *Asymptotic analysis of singular perturbations*, volume 9 of *Studies in Mathematics and its Applications.* Springer-Verlag, New-York, 1979.

[8] C. François. *Les méthodes de perturbation en mécanique.* Ecole Nationale supérieure de techniques avancées, 1981.

[9] A. Henrot and M. Pierre. Un problème inverse en formage des métaux liquides. M^2AN, 23:155–177, 1989.

[10] A. Jeffrey. *Magnetohydrodynamics*, volume 33 of *University mathematical texts.* Olivier & Boyd, 1966.

[11] L.D. landau and E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*, volume 6 of *Course of theoretical physics.* Pergamon press, 1959.

[12] L.D. landau and E.M. Lifshitz. *Electrodynamics of continuous media*, volume 8 of *Course of theoretical physics.* Pergamon press, 1960.

[13] A. J. Mestel. Magnetic levitation of liquids metals. *Journal of Fluid Mechanics*, 117:27–43, 1982.

[14] M. Pierre and J. R. Roche. Computation of free surfaces in the electromagnetic shaping of liquid metals by optimization algorithms. *European Journal of mechanics, B/Fluids*, 10(5):489–500, 1991.

[15] J. A. Shercliff. Magnetic shaping of molten metal columns. *Proc. Royal. Soc. London*, 375(A):455–473, 1981.

[16] A. Sneyd. Generation of fluid motion in a circular cylinder by an unsteady applied magnetic field. *Journal of Fluid Mechanics*, 49(4):817–827, 1971.

[17] A. Sneyd. Fluid flow induced by a rapidly alternating or rotating magnetic field. *Journal of Fluid Mechanics*, 92(1):35–51, 1979.

[18] A. D. Sneyd and H. K. Moffatt. Fluid dynamical aspects of the levitation-melting process. *Journal of Fluid Mechanics*, 117:45–70, 1982.

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399